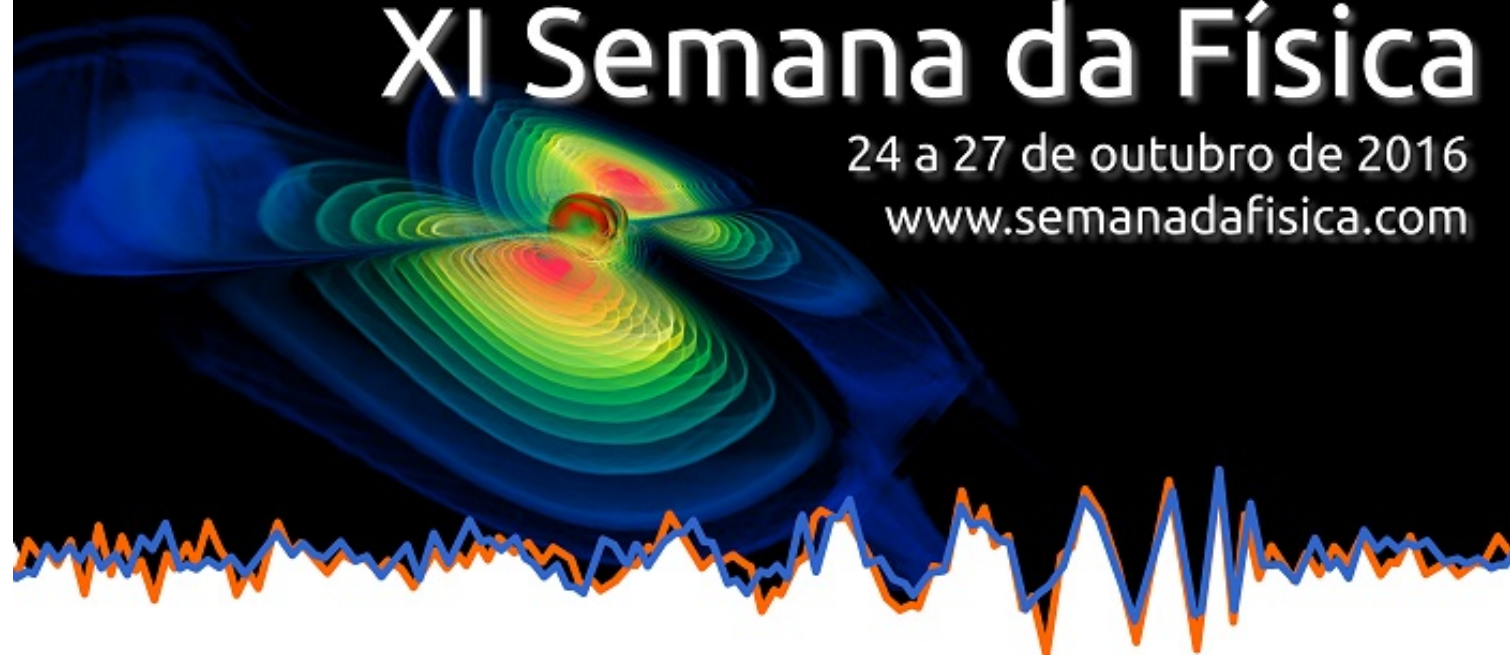


Physicae Organum

# XI Semana da Física

24 a 27 de outubro de 2016

[www.semanadafisica.com](http://www.semanadafisica.com)



## Nota editorial

A presente edição teve sua composição final realizada posteriormente à sua publicação original, com o objetivo de padronização editorial e atribuição de identificadores digitais (DOIs) aos artigos. Esse processo não alterou o conteúdo dos trabalhos originalmente publicados.

A equipe editorial agradece à Biblioteca Central da Universidade de Brasília (BCE/UnB) pelo apoio na configuração e no registro dos DOIs da revista, especialmente à bibliotecária Luísa Chaves Café.

— Leonardo Luiz e Castro, responsável pela composição final, 2026

## Editorial Note

This issue had its final composition prepared after its original publication, with the aim of editorial standardization and the assignment of digital object identifiers (DOIs) to the articles. This process did not alter the content of the originally published works.

The editorial team thanks the Central Library of the University of Brasília (BCE/UnB), especially librarian Luísa Chaves Café, for their support in configuring and registering the journal's DOIs.

— Leonardo Luiz e Castro, responsible for the final composition, 2026

## Apresentação

Nesta Edição da *Physicae Organum* estamos publicando, além dos artigos normais e convidados, os trabalhos que foram apresentados na Semana da Física de 2016. São diversos trabalhos abordando assuntos variados. A *Physicae Organum* se orgulha de poder publicar, em conjunto com o PET-Física da Universidade de Brasília, tais trabalhos. Esperamos que este seja o início de uma longa tradição.

Estão todos convidados, portanto, a buscar em nosso sumário aqueles artigos que possam ser de interesse. Que tais artigos possam suscitar debates de futuros desenvolvimentos do conhecimento.

Atenciosamente,

Olavo L.S.F. Editor Gerente

## Semana da Física — Apresentação

A Semana da Física é um evento anual, que teve início em 2005, assim tendo sua décima primeira edição em 2016. Ela se enquadra na Semana Universitária da Universidade de Brasília, a qual ocorre anualmente no segundo semestre. Em sua edição anterior, a Semana Universitária contou com duzentas e noventa e uma atividades organizadas por vários cursos da Universidade.

As Semanas da Física são realizadas por iniciativa do grupo do Programa de Educação Tutorial do curso de Física (PET-Física) da Universidade de Brasília (UnB), Direção do IF - através da Comissão Organizadora e Comitê Científico-, Pós-Graduação em Física do IF, Pós-Graduação em Ensino de Física-MNPEF-IF e Centro Internacional da Física da Matéria Condensada (CIFMC). Em edições anteriores, já contou com a participação do grupo de Ensino de Física, do Museu de Ciência e Tecnologia de Brasília e do grupo do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação À Docência (PIBID) do curso de Física.

O evento envolve os três pilares do Ensino Superior, os quais são englobados em sua programação: Ensino, Pesquisa e Extensão. As atividades são voltadas para um ou mais pilares, assim promove difusão de aprendizados e complementação do conhecimento. Elas se encaixam em diversas sortes de moldes: palestras, mini-cursos, oficinas de experimentos, mesas redondas, apresentações de pôsteres e comunicações orais, entre outras programações. Nas atividades em edições passadas, houve a presença de pesquisadores reconhecidos nacional e internacionalmente.

Ainda, a Semana da Física facilita o contato de estudantes da graduação e da pós-graduação com as suas áreas de interesse e com profissionais atuantes. O evento garante um grande número de pessoas contempladas por sua programação, pois tanto os docentes quanto os discentes da Universidade são consultados para a sua elaboração.

A Comissão Organizadora se preocupa, historicamente, em tornar acessível o conhecimento disponibilizado em sua programação. Portanto o evento abriu espaço para que pessoas das mais diversas formações possam discutir física e assuntos relacionados direta ou indiretamente com ela, não somente na grande área de Exatas, mas em outras grandes áreas também. Por exemplo, em sua X edição, a palestrante Katemari Rosa, expondo sobre a dificuldade do acesso de mulheres negras nos altos pilares acadêmicos. Na edição anterior a essa, estudantes de ensino médio de instituições públicas do Distrito Federal trouxeram seus trabalhos apresentados nas Feiras de Ciências de suas escolas. Esse tipo de inserção estimula o sentimento de pertencimento ausente em grande parte dos discentes e os atrai ao meio acadêmico.

No ano de 2014, a Semana da Física contemplou nas suas atividades a 1ª edição da Homenagem para os professores do IFD. Sete docentes foram homenageados. A escolha foi realizada por meio de votação dos estudantes de cursos de exatas da Universidade. A atividade foi proposta para incentivar uma melhor interação entre os corpos discente e docente e para o estímulo de continua busca por qualidade e reconhecimento nos três pilares do Ensino Superior.

Historicamente, a maioria dos palestrantes do projeto são professores da UnB, mas sempre há convidados externos, cuja quantidade tem crescido a cada edição, a depender do financiamento concedido ao projeto. Também conta com a presença de discentes de pós-graduação do Instituto de Física da UnB. O evento já contou com a presença de ga-

nhadores de prêmios científicos, como as palestrantes Thaísa Storchi Bergmann e Márcia Cristina Bernardes Barbosa.

O reconhecimento da Semana da Física e de sua tradição evidencia o sucesso que o evento tem de praxe. Assim, os vinculados ao Instituto de Física aguardam o evento todo ano com grande expectativa.

# Sumário

1	Álgebras de Clifford	1
2	Calculation of Interaction between Ferromagnetic Solids Simplified by Symmetry Considerations	1
3	A “Prova experimental das Correntes Moleculares de Ampère” de A. Einstein e W. J. de Haas.	15
4	Simulations of the Formation of STIPs (Systems of Tightly Packed Inner Planets)	81
5	Análise de protoestrelas com dados observacionais abertos	96
6	Como o Sistema Solar se formou A Busca pelo Planeta Desconhecido	102
7	Estudo sobre a elaboração de questões autocorretivas	114
8	Física e Música	121
9	Freezing Suppression in Confined Water	128
10	Sobre a Existência de Dogmas em Físicar	138
11	Uma Técnica de Otimização Utilizando Algoritmos Genéticos para Encontrar Extremos de Funções	148
12	Radiação de Corpo Negro e os Primórdios da Física Quântica	154

# Álgebras de Clifford

JOSÉ ELIAS ABRÃO NETO\*

ORIENTADOR: OLAVO LEOPOLDINO DA SILVA FILHO†

Universidade de Brasília

## Resumo

*Esse artigo tem como objetivo introduzir o leitor a álgebra de Clifford. Foi assumido que o leitor tem um conhecimento mínimo de álgebra linear como por exemplo multiplicação matricial. Após introduzir as ideias e conceitos sobre a álgebra de Clifford são feitos dois exemplos de como ela pode ser aplicada na física.*

Palavras-chave: Álgebra, Clifford, Eletromagnetismo.

## 1 Historia

As álgebras de Clifford tiveram origem na tentativa de representar um número complexo geometricamente. Com base na representação geométrica de números complexos, William Rowan Hamilton, em busca de uma generalização desses para o espaço tridimensional, criou em 1843 os números quatérnions.

Em 1844 Hermann Grassmann desenvolveu a sua própria álgebra com uma operação chamada produto exterior, sendo esta a operação chave na álgebra que hoje se conhece como álgebra externa.

A álgebra geométrica de Clifford, surge no século XIX em 1878, pelo matemático William Kingdom Clifford. Clifford introduziu o análogo do produto de quatérnions de Hamilton dentro da estrutura da álgebra extensão de Grassmann, obtendo um sistema naturalmente adaptado para a geometria ortogonal de um espaço arbitrário.

## 2 Motivações

Do que foi dito anteriormente, fica claro que uma maneira simples de introduzir uma motivação para o estudo da álgebra de Clifford é através dos números complexos.

---

\*elias\_abrao@hotmail.com

†olavolsf@gmail.com

Sabemos que um número complexo  $z$  no plano pode ser escrito como  $z = x + iy$ , em que  $x$  e  $y$  são suas coordenadas no plano. Há, evidentemente, uma representação do par ordenado  $(x, y)$ , também no plano, em termos de vetores, na forma  $\vec{z} = x\hat{i} + y\hat{j}$ .

Ora, é imediata a identificação dessas duas representações. De fato, podemos representá-las igualmente escrevendo, simplesmente, o par ordenado  $(x, y)$ .

Entretanto, se imaginarmos a representação complexa e fizermos o produto entre dois números complexos  $z_1 = x_1 + iy_1$  e  $z_2^* = x_2 - iy_2$  (o conjugado complexo de  $z_2$ ), obtemos

$$z_1 z_2^* = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2) \quad (1)$$

Note que esse resultado é sugestivo, se o pensarmos como relacionado a vetores e seus produtos usuais (escalar e vetorial). De fato, pensando em termos de vetores, poderíamos escrever o resultado anterior como

$$z_1 z_2 = \vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 + i|\vec{z}_1 \times \vec{z}_2|, \quad (2)$$

em que fomos obrigados a usar o módulo por estarmos em duas dimensões.

Ora, então vemos que a operação de produto de números complexos é bastante rica (em duas dimensões), pois ela engloba, pensando em vetores, tanto o produto escalar como o produto vetorial, sintetizados em um único produto (no caso, de números complexos).

A álgebra de Clifford vem justamente para generalizar essas noções para espaços de dimensão maior do que duas.

### 3 Espaço Vetorial

Um conjunto não vazio  $V$  é um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$  se em seus elementos estiverem definidas as seguintes operações:

- Dados dois elementos  $u$  e  $v$  de  $V$  existe um outro elemento  $u + v$  que também pertence a  $V$ . Essa operação é denominada soma e indica que  $V$  é fechado com relação a ela;
- Dado um  $\alpha \in \mathbb{K}$  e  $v \in V$  existe um outro elemento  $\alpha \cdot v$  pertencente a  $V$ . Essa operação é denominada multiplicação por escalar.

Um elemento  $u$  pertencente a  $V$  é chamado de vetor covariante ou somente vetor e é escrito como  $\vec{u}$ .

As operações citadas anteriormente têm as seguintes propriedades:

**Propriedade 3.1.** (Espaço Vetorial) Sejam  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$  e  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ ; temos que:

1. *Comutatividade da Adição:*  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. *Associatividade da Adição:*  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3. *Elemento Neutro da Adição:*  $\vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$

4. *Inverso Aditivo*:  $\forall u \in V, \exists v \in V : u + v = v + u = 0$ ;
5. *Associatividade da Multiplicação*:  $\alpha(\beta u) = \beta(\alpha \vec{u})$
6. *Distributividade dos Escalares*:  $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
7. *Distributividade dos Vetores*:  $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
8. *Elemento Neutro da multiplicação por escalar*:  $\exists \gamma \in \mathbb{K} : \forall u \in V, \gamma u = u$ .

**Definição 3.1.** (*Combinação Linear*) Um vetor  $\vec{v} \in V$  pode ser escrito como uma combinação linear de  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  se existirem escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  tal que:

$$\vec{v} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i,$$

onde os vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  formam um subconjunto  $\mathcal{B}$  de  $V$ .

**Definição 3.2.** (*Base*) É dito que  $\mathcal{B}$  é um conjunto gerador de  $V$  se todos os elementos de  $V$  podem ser escritos como uma combinação linear de um número finito de elementos de  $\mathcal{B}$ . O subconjunto  $\mathcal{B}$  também é conhecido como base do espaço vetorial  $V$ .

É costume fazer com que os vetores da base tenham modulo igual a 1, quando então dizemos que os vetores da base são normalizados, ou que a base, de modo geral, é normalizada.

**Definição 3.3.** (*Dimensão*) Se a base  $\mathcal{B}$  de um espaço vetorial  $V$  tem  $n$  elementos, então dizemos que  $n$  é a dimensão do espaço vetorial  $V$ .

Há, entretanto, espaços vetoriais de dimensão infinita, quando então a base tem infinitos elementos<sup>1</sup>.

### 3.1 Produto Interno

Uma estrutura de Espaço Vetorial não depende de se definir a operação de produto interno entre vetores. Essa é uma operação que se introduz posteriormente, quando é o caso, à estrutura de Espaço Vetorial.

Tal operação, entretanto, muito frequentemente é relevante para os estudos em Física, de modo que a apresentamos a seguir.

<sup>1</sup>Esta diferenciação é importante, pois há diversos teoremas que valem para espaços de dimensão finita, mas não valem para espaços de dimensão infinita

**Definição 3.4.** (*Produto Escalar*) Seja  $V$  um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais ou números complexos ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ); define-se um produto escalar entre elementos de  $V$  como:  $\forall u, v \in V, \exists \gamma \in \mathbb{K}$  tal que

$$\begin{aligned} \langle, \rangle : V \times V &\rightarrow \mathbb{K} \\ \langle u, v \rangle &\mapsto \gamma \end{aligned} \quad (3)$$

ou seja, a função  $\langle, \rangle$  toma dois vetores pertencentes a  $V$  e leva em um número real ou complexo pertencente a  $\mathbb{K}$ .

**Propriedade 3.2.** (*Produto Escalar*) Essa função  $\langle, \rangle$  é chamada de produto interno e tem as seguintes propriedades ( $\forall u, v, w \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ ):

1.  $\langle u + v, w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle u, w \rangle$ ,  $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$ ;
2.  $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda^* \langle u, v \rangle$ ,  $\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$  ('\*' representa o complexo conjugado);
3.  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle^*$ ;
4.  $\langle u, u \rangle \geq 0$ , sendo igual a zero apenas quando  $u = 0$ .

Diferentes espaços podem ter produtos internos diferentes. Por exemplo, o espaço de Hilbert  $L^2$  tem produto interno definido como

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)^* y(t) dt.$$

Já o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  tem produto interno

$$\langle u, v \rangle = (\vec{u} \cdot \vec{v}) = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\theta),$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre os dois vetores.

**Exemplo 3.1.** Olhando para o produto interno no espaço euclidiano é possível ver uma das vantagens de se fazer as bases do espaço serem ortogonais ( $\theta = 90^\circ$ ). Considerando as bases ortogonais  $(e_1, e_2)$  no espaço euclidiano de dimensão  $\dim V = 2$ , o produto interno de dois vetores  $\vec{u} = u_1 e_1 + u_2 e_2$  e  $\vec{v} = v_1 e_1 + v_2 e_2$  é:

$$\begin{aligned} (u \cdot v) &= \langle u_1 e_1 + u_2 e_2, v_1 e_1 + v_2 e_2 \rangle \\ &= u_1 v_1 \langle e_1, e_1 \rangle + u_2 v_1 \langle e_2, e_1 \rangle + u_1 v_2 \langle e_1, e_2 \rangle + u_2 v_2 \langle e_2, e_2 \rangle, \quad (4) \\ &= u_1 v_1 |e_1| |e_1| \cos(0) + u_2 v_2 |e_2| |e_2| \cos(0) \end{aligned}$$

ou, usando a definição para o produto escalar no espaço euclidiano,

$$(u \cdot v) = u_1 v_1 |e_1| |e_1| + u_2 v_2 |e_2| |e_2|.$$

Caso também sejam consideradas bases normalizadas (módulo de  $e_i = 1, \forall i$ ), então:

$$(u \cdot v) = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

**Definição 3.5.** Uma base que é ortogonal e tem módulo igual à unidade de  $\mathbb{K}$  (que representamos simplesmente por 1) é chamada de base ortonormal.

Elementos de  $V$  não nulos que tem produto interno igual a zero são elementos linearmente independentes, ou seja não é possível escrever um elemento como a combinação linear do outro.

Do resultado a cima temos que o módulo de um vetor no espaço euclidiano pode ser dado pelo produto interno<sup>2</sup>

$$\langle v, v \rangle = (v, v) = \sum_i^n v_i v_i = |\vec{v}|^2.$$

### 3.2 Espaço Dual e Funcionais

Em um espaço vetorial  $V$  podemos realizar operações que levam um elemento de  $V$  em um elemento de  $\mathbb{K}$ , como fazer uma integral definida usando elementos de  $V$ .

Essas operações são chamadas de transformações e são dadas por funcionais sendo aplicados em vetores.

**Exemplo 3.2.** Por exemplo seja  $V$  o espaço vetorial dos polinômios no parâmetro  $t$  sobre os números reais e  $\tau$  uma transformação linear  $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\tau(v) = \int_a^b v(t) dt$$

O funcional  $\tau$  no exemplo seria a integral definida.

Mais especificamente, estamos interessados em trabalhar com transformações lineares ou seja:

**Definição 3.6.** (Transformações Lineares) Considerando a transformação de um espaço vetorial  $V$  em um corpo  $\mathbb{K}$  da forma  $\Phi : V \rightarrow \mathbb{K}$ , tais que, para  $u, v \in V$  e  $a, b \in \mathbb{K}$ , temos que a transformação

<sup>2</sup>O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  apresenta particular interesse, uma vez que se pode mostrar que todo espaço vetorial de dimensão finita  $n$  é isomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .

é linear se, e somente se:

$$\Phi(au + bv) = a\Phi(u) + b\Phi(v),$$

de modo que funcionais lineares em  $V$  são transformações lineares de  $V$  no corpo  $\mathbb{K}$ .

Dados dois funcionais lineares  $\Phi, \Psi$  sobre um espaço vetorial  $V$  e  $\forall v \in V$ , podem-se definir as operações de soma de funcionais e multiplicação por escalar a partir das propriedades:

**Propriedade 3.3.** *Operações sobre transformações lineares:*

1.  $(\Phi + \Psi)(v) = \Phi(v) + \Psi(v)$ ,
2.  $(a\Phi)(v) = a\Phi(v)$ .

O conjunto dos funcionais lineares munido das duas operações 3.3 forma um espaço vetorial de grande importância.

**Definição 3.7.** *(Espaço Dual)* O espaço vetorial cujos elementos são transformações lineares de  $V$  em  $\mathbb{K}$  que possuem as propriedades 3.3 é chamado de espaço dual ao espaço vetorial  $V$ , e é representado como  $V^*$ .

Dado um vetor qualquer  $v \in V$ , é sempre possível reescrever este vetor como uma combinação linear de elementos de uma base ortonormal. Se o espaço  $V$  tem dimensão  $\dim V = n$ , é necessário ter  $n$  diferentes elementos ortonormais  $(e_i)$ , de modo que o vetor  $v$  pode ser escrito como:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n v_i e_i,$$

Tomando um funcional  $\Psi \in V^*$  e aplicando-o a  $\vec{v}$ , tem-se

$$\Psi(v) = \sum_{i=1}^n v_i \Psi(e_i).$$

Com isso, podemos demonstrar um importante resultado:

**Teorema 3.1.** *Um elemento qualquer  $\Psi \in V^*$  pode ser escrito em função dos termos  $\Psi(e_i)$ , ou seja, qualquer funcional de  $V^*$  pode ser decomposto na forma de uma combinação linear dos  $\Psi(e_i)$ . Deste modo, pode-se assumir os termos  $\Psi(e_i)$  como base do espaço dual  $V^*$ .*

**Demonstração 3.1.** Para que sejam bases de  $V^*$  os elementos  $\Psi(e_i)$  devem ser linearmente independentes.

Como, por construção, os elementos  $e_i$  são ortonormais temos que:

$$\sum_{i=1}^m K_i e_i \Leftrightarrow (\forall_i) K_i = 0,$$

onde  $K_i \in \mathbb{R}$ . Aplicando um funcional  $\Psi$  em ambos os lados da equação:

$$\Psi\left(\sum_{i=1}^n K_i e_i\right) = \Psi(0) \Leftrightarrow (\forall_i) K_i = 0,$$

Como os funcionais de  $V^*$  são lineares pode-se reescrever o termo do lado direito da igualdade como:

$$\Psi\left(\sum_{i=1}^n K_i e_i\right) = \Psi(0) = \Psi(v - v) = \Psi(v) - \Psi(v) = 0 \Leftrightarrow (\forall_i) K_i = 0,$$

Então os elementos  $\Psi(e_i)$  são linearmente independentes e podem ser as bases de  $V^*$ . Como o espaço  $V^*$  também tem elementos que podem ser decompostos como uma combinação linear de suas bases, de maneira análoga aos vetores, os elementos de  $V^*$  são chamados de covetores ou vetores contravariantes.

Denota-se  $\mathcal{B}^* = (e^1, e^2, \dots, e^n)$  o conjunto dos elementos de base do espaço dual  $V^*$ , como visto acima. Esta base do espaço dual é definida de tal forma que, se  $e^i$  for aplicado em  $e_j$  deve ser obtido:

$$e^i(e_j) = \delta_j^i,$$

onde o símbolo matemático  $\delta_j^i$  é o delta de Kroenecker.

Tendo-se um vetor  $v \in V$  é possível achar o seu covetor  $\sigma \in V^*$ , pois as bases de ambos os espaços estão relacionadas. É possível, portanto, passar-se de uma base no espaço dual para um base no correspondente espaço vetorial por meio da métrica.

Para vermos isso mais claramente, precisamos definir uma nova quantidade em nosso formalismo.

**Definição 3.8.** (Métrica) A métrica em um espaço vetorial  $V$  define a maneira como calculamos comprimentos (em sentido genérico) neste espaço. Assim, se definimos um comprimento dado por  $ds^2$ , então

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{i,j} u^i u^j. \quad (5)$$

Com a definição 3.8, é fácil ver que a métrica é uma matriz dada pelo produto interno das bases, ou seja,  $g_{i,j} = \langle e_i, e_j \rangle$ .

**Exemplo 3.3.** Por exemplo seja  $V$  o espaço euclidiano em três dimensões, então as bases na forma matricial são:

$$\vec{i} = ( 1 \ 0 \ 0 )$$

$$\vec{j} = ( 0 \ 1 \ 0 )$$

$$\vec{k} = ( 0 \ 0 \ 1 )$$

A matriz métrica fica:

$$g_{i,j} = \begin{bmatrix} \vec{i} \cdot \vec{i} & \vec{i} \cdot \vec{j} & \vec{i} \cdot \vec{k} \\ \vec{j} \cdot \vec{i} & \vec{j} \cdot \vec{j} & \vec{j} \cdot \vec{k} \\ \vec{k} \cdot \vec{i} & \vec{k} \cdot \vec{j} & \vec{k} \cdot \vec{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Conhecendo-se a métrica do espaço vetorial  $V$  e suas bases é possível obter as bases do espaço dual, pois há um isomorfismo entre os espaços<sup>3</sup>. Assim, temos como definir uma correlação simétrica  $\tau : V \rightarrow V^*$ , tomando um elemento de  $V$  e levando em um elemento de  $V^*$ , que é invertível, ou seja,  $\tau^{-1} : V^* \rightarrow V$ . Essa correlação  $\tau$  é a métrica.

Seja  $v$  um elemento de  $V$  podemos achar um elemento  $\alpha \in V^*$  como:

$$\begin{aligned} v &= \sum_i v_i e_i = \sum_i g_{ij} x^j e^i = [g] \alpha \\ &\Rightarrow \alpha = [g]^{-1} v \end{aligned} \quad (6)$$

em que  $[g]$  é a representação da métrica (correlação entre  $V$  e  $V^*$ ) e  $[g]^{-1}$  é a matriz da correlação inversa.

É comum fazer a simplificação na notação para os elementos da representação, colocando-se  $x^j = v^j$  para identificar as componentes do vetor dual relativas ao vetor  $v$ , cujas componentes devem ser escritas  $v_j$ , salientando-se apenas que as componentes de um vetor de  $V^*$  têm o índice em cima, enquanto que as componentes de um vetor de  $V$  apresentam índices embaixo.

Outra notação comum decorre de se ocultar o somatório e subir/descer os índices dos escalares de modo a ter  $\vec{v} = v^i e_i$  ou  $\alpha = x_j e^j = v_j e^j$ , nesse caso deve-se olhar apenas para a base para saber se o elemento pertence a  $V$  ou a  $V^*$ : a base de  $V$  é escrita com índices embaixo  $e_i$ , enquanto que a base de  $V^*$  é escrita com índices em cima  $e^j$ . Essa notação é chamada de notação de Einstein: índices repetidos, um em cima e o outro embaixo, representam índices mudos relacionados a um somatório sobre todos os valores que tal índice pode assumir.

Com essas convenções, podemos escrever

$$v_i = g_{ij} v^j, \quad (7)$$

<sup>3</sup>Afirmamos anteriormente que qualquer espaço vetorial de dimensão finita  $n$  é isomorfo ao  $\mathbb{R}^n$ , assim, como ambos  $V$  e  $V^*$  são de dimensão  $n$ , são ambos isomorfos a  $\mathbb{R}^n$  e, portanto, isomorfos entre si, já que o isomorfismo é uma propriedade simétrica e transitiva, além de reflexiva – uma relação de equivalência;

que estabelece a relação entre os elementos da representação, ou seja, as componentes do vetor e covetor nas bases dadas.

**Exemplo 3.4.** Na Teoria Especial da Relatividade, mostra-se que a invariância da velocidade da luz  $c$  com o estado cinemático do referencial implica na invariância do elemento de linha

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (8)$$

implicando que a métrica deve ser escrita como

$$\eta^i_j = \langle e^i, e_j \rangle = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad (9)$$

em que  $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$  representa uma matriz  $4 \times 4$  na qual apenas os elementos da diagonal são diferentes de zero e têm os valores assinalados.

Nesse caso, diferentemente do espaço euclidiano, não é mais possível representar vetores e covetores (os duais) da mesma maneira.

Em termos de representação, temos

$$e_0 = (1, 0, 0, 0); e_1 = (0, 1, 0, 0); e_2 = (0, 0, 1, 0); e_3 = (0, 0, 0, 1) \\ e^0 = (1, 0, 0, 0); e^1 = (0, -1, 0, 0); e^2 = (0, 0, -1, 0); e^3 = (0, 0, 0, -1)$$

### 3.3 Tensores

Como visto anteriormente um funcional/covetor atuando em um vetor gera um número escalar. Pode-se pensar, então, no produto de dois covetores atuando em dois vetores.

**Definição 3.9.** Sejam  $\alpha, \beta \in V^*$ ,  $v, u \in V$  e os escalares  $\alpha(v), \beta(u)$ . O produto dos escalares define um funcional bilinear (linear em ambas as entradas) agindo sobre o produto cartesiano  $V \times V$  na forma

$$\alpha \otimes \beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K} \\ (\alpha \otimes \beta)(v, u) \mapsto \alpha(v)\beta(u)$$

A grandeza  $\alpha \otimes \beta$  é denominada produto tensorial de  $\alpha$  e  $\beta$ .

Podemos, igualmente, definir um produto tensorial de vetores. Nesse caso, temos um funcional bilinear atuando no produto cartesiano de  $V^* \times V^*$  na forma

$$(v \otimes u)(\alpha, \beta) = \alpha(v)\beta(u).$$

O produto tensorial forma um espaço vetorial. Denota-se por  $T^2(V) \equiv T^2$  o espaço vetorial formado pelo produto tensorial  $\alpha \otimes \beta$  de elementos  $\alpha, \beta \in V^*$  e  $T_2(V) \equiv T_2$  o espaço vetorial formado pelo produto

tensorial  $u \otimes v$  de elementos  $u, v \in V$ . De modo geral

$$T^2 = V^* \otimes V^*$$

$$T_2 = V \otimes V$$

**Teorema 3.2.** *Se a dimensão do espaço  $V$  for igual a  $n$  então*

$$\dim T_2 = \dim T^2(V) = n^2. \quad (10)$$

**Demonstração 3.2.** *Seja  $\{e_i\}$  um conjunto de bases de  $V$  e  $\{e^i\}$  um conjunto de bases de  $V^*$ , sabe-se que*

$$\alpha(v) = \sum_i v^i \alpha(e_i) = v^i \alpha_i,$$

*onde estamos usando a notação de Einstein para evitar ter que escrever o somatório e estamos fazendo a simplificação  $\alpha(e_i) = \alpha_i$ . Fazendo as mesmas simplificações para  $\beta(u)$  temos:*

$$(\alpha \otimes \beta)(v, u) = v^i \alpha_i u^j \beta_j. \quad (11)$$

*Considerando então os funcionais  $\alpha$  e  $\beta$  como os covetores da base de  $V^*$*

$$(e^i \otimes e^j)(v, u) = \sum_k \sum_m v^k [e^i(e_k)] u^m [e^j(e_m)] = v^k \delta_k^i u^j \delta_m^j,$$

*em que já usamos que  $e^i(e_k) = \delta_k^i$ , de modo que ficamos com*

$$(e^i \otimes e^j)(v, u) = v^i u^j. \quad (12)$$

*Como podemos escrever um covetor em função dos termos de base e usando a propriedade do produto tensorial de ser bilinear, pode-se chegar à conclusão que*

$$\alpha \otimes \beta = a_i b_j e^i \otimes e^j,$$

*onde os valores  $a_i$  e  $b_j$  são os valores obtidos ao se decompor os covetores  $\alpha$  e  $\beta$  em função dos elementos de base.*

Do resultado acima é possível concluir que os funcionais bilineares  $e^i \otimes e^j$  podem ser usados como elementos de base do espaço  $T^2$ . Assim, um funcional bilinear arbitrário  $\mathbf{B}$  pode ser escrito como

$$\mathbf{B} = \sum_i \sum_j b^{i,j} e^i \otimes e^j = b_{i,j} e^i \otimes e^j,$$

onde os termos  $b_{ij}$  são escalares obtidos através da aplicação do funcional  $\mathbf{B}$  nos vetores de base  $(e_i, e_j)$ . O mesmo procedimento pode ser feito para as grandezas  $e_i \otimes e_j$ . Desse modo, é natural tomar  $e_i \otimes e_j$  como base de  $T_2$ .

Os elementos do espaço  $T^2$  são chamados de tensores contravariantes de ordem dois e os elementos de  $T_2$  são chamados de tensores covariantes de ordem dois.

Tensores são objetos matemáticos que estendem as noções de vetores. Como visto anteriormente, ele pode ser construído a partir da aplicação de funcionais em vetores de um espaço vetorial  $V$ .

Podemos generalizar os tensores de maneira análoga ao que foi feito, definindo a multiplicação de  $n$  escalares resultantes de  $n$  funcionais atuando sobre  $n$  vetores, o resultado é chamado tensor de ordem  $n$ .

Pela mesma linha de raciocínio é possível concluir que vetores são tensores de ordem um e escalares são tensores de ordem zero.

**Exemplo 3.5.** *Seja  $v, u \in V$  dado por  $v = 2e_1 + 3e_2$  e  $u = -5e_1 + 6e_2$  e a métrica  $g_{i,j}$  dada por:*

$$g_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

*Esta matriz pode ser encarada como a matriz de representação da transformação linear  $T(x,y) = (x+y, x-y)$  pois, se substituirmos a base canônica  $e_1 = (1,0)$  e  $e_2 = (0,1)$ , obtemos, respectivamente,  $T(1,0) = (1,1)$  e  $T(0,1) = (1,-1)$ , de modo que a matriz de representação de  $T$  na base  $\{e_i\}$ , escrita como  $[T]_e$  é exatamente 13, pois é construída a partir dos resultados da aplicação de  $T$  escritos como colunas. Assim, de fato, dar a matriz de  $g$  é dar a representação da transformação linear que associada à correlação entre o espaço de origem  $V$  e seu dual  $V^*$ .*

*Como se trata, de fato, de um operador linear, visto levar de um espaço vetorial de dimensão  $n$  em outro de mesma dimensão, podemos inverter a matriz e obter, assim, a matriz de representação da transformação inversa.*

*Podemos, imediatamente, obter os elementos da base de  $V^*$ , usando a métrica na forma (ver (6))  $e^i = [g^{-1}]^{i,j}e_j$ . Note que, por uma questão de consistência, a inversa da matriz  $[g]$  deve vir com os índices em cima, visto proceder à transformação inversa relativamente a  $[g]$ , ou seja,*

$$\begin{bmatrix} e^1 \\ e^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e_1 + e_2 \\ e_1 - e_2 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

*Os elementos  $\alpha, \beta \in V^*$  podem ser obtidos como  $\alpha = [g]^{-1}v = v_i e^i$  e  $\beta = [g]^{-1}u = u_i e^i$ , ou seja, usando (14),*

$$\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix},$$

*e*

$$\beta = \begin{bmatrix} -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}.$$

Assim os elementos  $\alpha$  e  $\beta$  são, na base de  $V^*$ ,

$$\alpha = 2e^1 + 3e^2, \beta = -5e^1 + 6e^2$$

O produto tensorial dos elementos  $\alpha$  e  $\beta$  é

$$\begin{aligned} (\alpha \otimes \beta) &= -(2 \cdot 5)e^1 \otimes e^1 - (3 \cdot 5)e^2 \otimes e^1 \\ &+ (2 \cdot 6)e^1 \otimes e^2 + (3 \cdot 6)e^2 \otimes e^2 \end{aligned}$$

ou

$$(\alpha \otimes \beta) = -10e^1 \otimes e^1 - 15e^2 \otimes e^1 + 12e^1 \otimes e^2 + 18e^2 \otimes e^2$$

O produto tensorial de  $\beta$  e  $\alpha$ , por sua vez, é

$$\begin{aligned} (\beta \otimes \alpha) &= -(5 \cdot 2)e^1 \otimes e^1 - (5 \cdot 3)e^1 \otimes e^2 \\ &+ (6 \cdot 2)e^2 \otimes e^1 + (6 \cdot 3)e^2 \otimes e^2 \end{aligned}$$

ou

$$(\beta \otimes \alpha) = -10e^1 \otimes e^1 - 15e^1 \otimes e^2 + 12e^2 \otimes e^1 + 18e^2 \otimes e^2$$

Fazendo a subtração dos dois produtos tensoriais

$$(\alpha \otimes \beta) - (\beta \otimes \alpha) = (-15 - 12)e^2 \otimes e^1 + (12 + 15)e^1 \otimes e^2 = -27e^2 \otimes e^1 + 27e^1 \otimes e^2.$$

Aplicando agora a subtração dos dois produtos tensoriais nos vetores  $v$  e  $u$

$$(\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha)(v, u) = (\alpha \otimes \beta)(v, u) - (\beta \otimes \alpha)(v, u) = \alpha(v)\beta(u) - \beta(v)\alpha(u),$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha(v) &= (2e^1 + 3e^2)(2e_1 + 3e_2) \\ &= 4e^1(e_1) + 6e^1(e_2) + 6e^2(e_1) + 9e^2(e_2), \\ &= 4 + 9 = 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta(u) &= (-5e^1 + 6e^2)(-5e_1 + 6e_2) \\ &= 25e^1(e_1) - 30e^1(e_2) - 30e^2(e_1) + 36e^2(e_2), \\ &= 25 + 36 = 61 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(u) &= (2e^1 + 3e^2)(-5e_1 + 6e_2) \\ &= -10e^1(e_1) - 15e^1(e_2) + 12e^2(e_1) + 18e^2(e_2), \\ &= -10 + 18 = 8 \end{aligned}$$

$e$

$$\begin{aligned}\beta(v) &= (-5e^1 + 6e^2)(2e_1 + 3e_2) \\ &= -10e^1(e_1) - 15e^1(e_2) + 12e^2(e_1) + 18e^2(e_2). \\ &= -10 + 18 = 8\end{aligned}$$

Então

$$(\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha)(v, u) = 13 \cdot 61 - 8 \cdot 8 = 793 - 64 = 729.$$

Dos resultados acima fica fácil ver que o produto tensorial não é comutativo, pois

$$(\alpha \otimes \beta)(v, u) = \alpha(v)\beta(u) \neq \alpha(u)\beta(v) = (\beta \otimes \alpha)(v, u).$$

## 4 Álgebra Exterior

Dado um tensor na forma  $X_1 \otimes X_2 \otimes \dots \otimes X_p$ , em que  $X_i$  com  $i = 1, \dots, p$  são vetores, pode-se definir o **Operador Alternador** como se segue.

**Definição 4.1.** (Operador Alternador) O Operador Alternador (Alt) é tal que

$$Alt(X_1 \otimes X_2 \otimes \dots \otimes X_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) X_{\sigma(1)} \otimes X_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes X_{\sigma(p)}, \quad (15)$$

onde  $S_p$  é o conjunto de todas as permutações possíveis e  $\varepsilon(\sigma) = 1$ , se o número de permutações feitas for par, e  $\varepsilon(\sigma) = -1$ , se o número de permutações feitas for ímpar.

Com a definição do alternador é possível definir a noção de **p-vetores**.

**Definição 4.2.** (p-Vetor) Um p-vetor( $A_{[p]}$ ) é um tensor contravariante de ordem p alternado, ou seja:

$$A_{[p]} = Alt(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_p),$$

onde  $v_1, v_2, \dots, v_p \in V$ . Denota-se por  $\Lambda_p(V)$  o espaço dos p-vetores. É simples mostrar que  $\Lambda_p(V)$  é espaço vetorial.

Assim,  $\Lambda_0(V) = \mathbb{R}$  e  $\Lambda_1(V)$  é o espaço dos 1-vetores, ressaltando-se que 1-vetor é sinônimo de vetor.

**Exemplo 4.1.** Vamos aplicar a definição de p-Vetores para explicitar um 2-vetor, ou seja, o

caso em que  $p = 2$ . Neste caso temos  $X_1 = u, X_2 = v$  e

$$A_2 = \frac{\sigma(1,2 \rightarrow 1,2)u \otimes v + \sigma(1,2 \rightarrow 2,1)v \otimes u}{2}$$

$$\Rightarrow A_2 = \frac{u \otimes v - v \otimes u}{2},$$

uma vez que a permutação  $\sigma(1,2 \rightarrow 2,1)$  é ímpar.

Se tivermos um 3-vetor, então  $X_1 = u, X_2 = v, X_3 = w$  e ficamos com

$$A_3 = \frac{1}{6} [u \otimes v \otimes w - u \otimes w \otimes v + w \otimes u \otimes v - v \otimes u \otimes w + v \otimes w \otimes u - w \otimes v \otimes u]$$

Com a definição de p-vetores pode-se definir o **produto exterior**.

**Definição 4.3.** (Produto Exterior) Sejam  $A_{[p]} \in \Lambda_p(V)$  um p-vetor e  $B_{[q]} \in \Lambda_q(V)$  um q-vetor; o produto exterior  $\wedge : \Lambda_p(V) \times \Lambda_q(V) \rightarrow \Lambda_{p+q}(V)$  é dado por

$$A_{[p]} \wedge B_{[q]} = Alt(A_{[p]} \otimes B_{[q]}). \quad (16)$$

**Exemplo 4.2.** Vamos conferir o resultado do produto exterior de um 1-vetor com um 2-vetor. Temos que calcular  $A_1 \wedge A_2$  que deve ser escrito como

$$A_1 \wedge A_2 = Alt(A_1 \otimes A_2) = Alt\left(u \otimes \frac{1}{2}(v \otimes w - w \otimes v)\right)$$

$$= \frac{1}{2} Alt(u \otimes v \otimes w - u \otimes w \otimes v)$$

$$= \frac{1}{2} Alt(u \otimes v \otimes w) - Alt(u \otimes w \otimes v)$$

dando, como resultado,

$$A_1 \wedge A_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{6} (u \otimes v \otimes w - u \otimes w \otimes v + v \otimes w \otimes u - v \otimes u \otimes w + w \otimes u \otimes v - w \otimes v \otimes u - u \otimes w \otimes v + u \otimes v \otimes w - v \otimes u \otimes w + v \otimes w \otimes u - w \otimes v \otimes u + w \otimes u \otimes v)$$

*Podemos, agora, proceder à combinação dos tensores semelhantes para obter, simplesmente*

$$A_1 \wedge A_2 = \frac{1}{6} [u \otimes v \otimes w - u \otimes w \otimes v + w \otimes u \otimes v - v \otimes u \otimes w + v \otimes w \otimes u - w \otimes v \otimes u]$$

*que nada mais é que  $A_3 = A_{1+2}$ .*

Das equações (15) e (16), fazendo o produto exterior de dois vetores  $v$  e  $u$ , é possível concluir que o produto exterior é anticomutativo.

$$\begin{aligned} v \wedge u &= \frac{1}{2}(v \otimes u - u \otimes v) \\ u \wedge v &= \frac{1}{2}(u \otimes v - v \otimes u) \\ v \wedge u &= -u \wedge v \end{aligned} \tag{17}$$

Tem-se também, imediatamente, que o produto exterior é associativo e linear.

$$\begin{aligned} (A_{[p]} \wedge B_{[q]}) \wedge C_{[r]} &= A_{[p]} \wedge (B_{[q]} \wedge C_{[r]}) \\ K \wedge A_{[p]} &= KA_{[p]}, K \in \Lambda_0(V) = \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dado os espaços vetoriais  $\Lambda_p(V)$  é construído o espaço vetorial  $\Lambda(V)$  como a soma direta dos espaços vetoriais  $\Lambda_p(V)$  com  $p = 1, \dots, n$ .

$$\Lambda(V) = \Lambda_0(V) \oplus \Lambda_1(V) \oplus \Lambda_2(V) \oplus \dots \oplus \Lambda_n(V) = \bigoplus_{p=0}^n \Lambda_p(V)$$

Já foi assinalado que os produtos tensoriais  $e_i \otimes e_j \otimes \dots \otimes e_p$ , em que  $\{e_i\}$  é base de  $V$ , são base do espaço vetorial  $V \otimes V \otimes \dots \otimes V$  ( $p$ -vezes). Podemos generalizar essa noção para o espaço vetorial  $\Lambda_p(V)$ .

**Definição 4.4.** *Seja  $\{e_i\}_{i=1..n}$  uma base de  $V$  de dimensão  $n$ . Então a base do espaço vetorial  $\Lambda_p(V)$  será dada por todas as permutações  $e_i \wedge e_j \wedge \dots \wedge e_p$  linearmente independentes.*

**Exemplo 4.3.** *Se temos  $p = 2$  e um espaço vetorial  $V$  de dimensão 3, então podemos formar os seguintes fatores linearmente independentes*

$$e_1 \wedge e_2; e_2 \wedge e_3; e_3 \wedge e_1,$$

*e mais nenhuma outra, pois já vimos que  $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$ . Assim, um 2-vetor em  $\mathbb{R}^3$  deve ser escrito na forma*

$$A_2 = a^{1,2} e_1 \wedge e_2 + a^{2,3} e_2 \wedge e_3 + a^{3,1} e_3 \wedge e_1.$$

em que  $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ . Finalmente, temos também

$$A_3 = a^{1,2,3} e_1 \wedge e_2 \wedge e_3,$$

com um único  $a^{1,2,3} \in \mathbb{K}$ , visto não ser possível combinar os  $e_i$  de outra forma que seja linearmente independente.

Note-se que, para  $p = 1$  em um espaço vetorial  $V$  tal que  $\dim(V) = 3$ , temos

$$A_1 = a^1 e_1 + a^2 e_2 + a^3 e_3,$$

onde  $a^i \in \mathbb{K}$ , ou seja, simplesmente um vetor usual. Da mesma maneira,  $A_0 = a^0$ , em que  $a^0 \in \mathbb{K}$ . Finalmente, temos ainda

$$A_3 = a^{1,2,3} e_1 \wedge e_2 \wedge e_3,$$

em que  $a^{1,2,3} \in \mathbb{K}$ , pois só há uma maneira linearmente independente de se combinar os três vetores de base disponíveis.

Define-se então uma **álgebra exterior**:

**Definição 4.5.** (Álgebra Exterior) Uma álgebra exterior é o par  $(\Lambda(V), \wedge)$ , ou seja o espaço vetorial  $\Lambda(V)$  equipado com o produto exterior  $\wedge$ .

**Definição 4.6.** (Multivetor) Se  $V$  é um espaço vetorial de dimensão  $n$ , então um elemento arbitrário  $(A)$  de  $\Lambda(V)$  é chamado de multivetor e consiste na soma de um escalar  $(\Lambda_0(V))$ , um 1-vetor  $(\Lambda_1(V))$ , um 2-vetor  $(\Lambda_2(V))$ , etc. Até um  $n$ -vetor  $(\Lambda_n(V))$

$$\Lambda(V) \ni A = F + F^i \mathbf{e}_i + F^{ij} \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j + \dots + F^{i\dots n} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_n$$

**Exemplo 4.4.** Para um espaço vetorial  $V$  sobre  $\mathbb{R}^3$  teremos um multivetor  $A$  dado por

$$A = a^0 + a^1 e_1 + a^2 e_2 + a^3 e_3 \\ + a^{1,2} e_1 \wedge e_2 + a^{2,3} e_2 \wedge e_3 + a^{3,1} e_3 \wedge e_1 + a^{1,2,3} e_1 \wedge e_2 \wedge e_3.$$

Em um espaço vetorial  $(V)$  podemos definir a ação de um funcional  $(\alpha)$  sobre um vetor  $\mathbf{v}$  de modo que  $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$ . Na álgebra exterior, isso se reflete simplesmente em  $\alpha : \Lambda_1(V) \rightarrow \Lambda_0(V)$ .

A generalização dessa operação que, atuando em um elemento pertencente a  $\Lambda_p(V)$ , leve em um elemento de  $\Lambda_{p-1}(V)$  é chamada de contração  $(\lrcorner)$ . Vamos definir a aplicação de um  $p$ -vetor em  $p$  funcionais antes de definirmos a contração, visto que a operação de contração depende desta noção.

**Definição 4.7.** (Aplicação de p-Vetor a p funcionais) A aplicação de um p-Vetor  $A_{[p]} = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_p$  a p funcionais  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  é definida como

$$A_{[p]}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) \alpha_1(\mathbf{v}_{\sigma(1)}) \alpha_2(\mathbf{v}_{\sigma(2)}) \dots \alpha_p(\mathbf{v}_{\sigma(p)}), \quad (18)$$

e é, evidentemente, um elemento de  $\mathbb{K}$ .

**Exemplo 4.5.** Vamos apresentar um exemplo concreto da aplicação de um 2-Vetor, construído a partir dos vetores  $v$  e  $u$ , a 2 funcionais  $\alpha$  e  $\beta$ . Temos, da definição, que

$$A_{[2]}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(\alpha(v)\beta(u) - \beta(v)\alpha(u)).$$

Considere, agora, que a aplicação funcional  $\alpha$  a um vetor representa a projeção deste vetor no eixo-x, enquanto que a aplicação do funcional  $\beta$  a um vetor representa a projeção deste vetor no eixo-y. Então ficamos com

$$A_{[2]} = \frac{1}{2}(v_x u_y - u_x v_y).$$

Podemos, agora, definir a contração.

**Definição 4.8.** (Contração) Seja  $A_{[p]}$  um p-vetor e  $\alpha$  um funcional, sua contração é dada por

$$(\alpha]A_{[p]})(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}) = pA_{[p]}(\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}),$$

onde  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}$  são funcionais arbitrários.

Escrevendo  $A_{[p]} = v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_p$  e usando as equações (15) e (16) é possível reescrever a definição 4.8 como:

$$(\alpha]A_{[p]})(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}) = \frac{p}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}) \alpha_1(v_{\sigma(2)}) \dots \alpha_{p-1}(v_{\sigma(p)})$$

A definição 4.8 nos diz que a contração de um funcional  $\alpha$  por um p-vetor aplicado em  $(p - 1)$  funcionais é igual a  $p$  funcionais sendo aplicados no p-vetor multiplicado por um escalar. Ao fazer a substituição indicada na definição 4.8, é possível ver que ao aplicar  $p$  funcionais no p-vetor obtém-se um número escalar (cf. também o exemplo anterior). Assim cada funcional  $\alpha$  ao ser aplicado diminui o grau do multivetor em um. Então a contração de um funcional por um p-vetor gera um  $(p-1)$ -vetor.

Para o caso um vetor  $v$  a definição acima se reduz à aplicação de um funcional em um vetor

$$\alpha]v = \alpha(v). \quad (19)$$

Como a contração faz um elemento do espaço  $\Lambda_p(V)$  ir para um elemento de  $\Lambda_{p-1}(V)$  assume-se que, caso seja feita a contração de um elemento de  $\Lambda_0(V)$ , o resultado é nulo.

$$\alpha \rfloor K = 0; K \in \Lambda_0(V)$$

**Exemplo 4.6.** Um resultado muito útil é a contração de um 2 – vetor por um funcional  $\alpha$

$$(\alpha \rfloor (v \wedge u))(\beta) = 2(v \wedge u)(\alpha, \beta),$$

de modo que  $\beta$  é um funcional arbitrário. Usando a definição 4.8 de contração, temos que

$$(\alpha \rfloor (v \wedge u))(\beta) = \frac{2}{2!}(v \otimes u - u \otimes v)(\alpha, \beta) = \alpha(v)\beta(u) - \alpha(u)\beta(v),$$

ou seja,

$$(\alpha \rfloor (v \wedge u))(\beta) = (\alpha(v)u - \alpha(u)v)(\beta) = ((\alpha \rfloor v)u - (\alpha \rfloor u)v)(\beta).$$

Como  $\beta$  é arbitrário, a expressão acima deve ser válida para qualquer funcional  $\beta$ , de modo que

$$\alpha \rfloor (v \wedge u) = (\alpha \rfloor v)u - v(\alpha \rfloor u) = \alpha(v)u - \alpha(u)v. \quad (20)$$

Por meio da definição de contração é possível se generalizar o resultado anterior para a contração de um produto exterior de um p-vetor com um q-vetor

$$\alpha \rfloor (A_{[p]} \wedge B_{[q]}) = (\alpha \rfloor A_{[p]}) \wedge B_{[q]} + (-1)^p A_{[p]} \wedge (\alpha \rfloor B_{[q]}),$$

sendo que o termo  $(-1)^p$  está relacionado com o número de termos (de  $A_{[p]}$ ) que o funcional  $\alpha$  terá que “pular” para chegar em  $B_{[q]}$ .

## 4.1 Álgebra de Grassmann

Dado um espaço vetorial  $V$  pode-se definir um funcional bilinear simétrico  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , ou seja, um produto interno. Define-se então uma **álgebra de Grassmann**

**Definição 4.9.** (Álgebra de Grassmann) Uma álgebra de Grassmann é uma álgebra exterior  $(\Lambda(V), \wedge)$  equipada com a generalização de  $g$  para o espaço vetorial  $\Lambda(V)$ .

A generalização do funcional bilinear  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , é denotada  $G$  e é definida como se segue.

**Definição 4.10.** (Produto Interno) Seja  $G$  a generalização do produto interno para espaços  $\Lambda_p(V)$ . Define-se  $G : \Lambda_p(V) \times \Lambda_p(V) \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$G(v_1 \wedge \dots \wedge v_p, u_1 \wedge \dots \wedge u_p) = (v^p \wedge v^{p-1} \wedge \dots \wedge v^1) \rfloor (u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_p).$$

Para casos onde haja espaços  $\Lambda_p$  e  $\Lambda_q$  com  $p \neq q$  define-se  $G(A_{[p]}, B_{[q]})$  como

$$G(A_{[p]}, B_{[q]}) = 0, \quad p \neq q.$$

Dentro da álgebra de Grassmann é possível definir-se o isomorfismo (dual) de Hodge (representado por  $\star$ ).

**Definição 4.11.** (Isomorfismo de Hodge) Seja  $A_{[p]}$  um  $p$ -vetor sobre um espaço vetorial  $V$  de dimensão  $n$ . Define-se o dual de Hodge como a operação

$$\star A_{[p]} = (-1)^{p(p-1)/2} A_{[p]} \lrcorner \Omega_v, \quad (21)$$

onde  $\Omega_v$  representa um  $n$ -vetor simples unitário ( $1e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$ ).

**Teorema 4.1.** Um resultado importante obtido usando o isomorfismo de Hodge é

$$v \times u = \star(v \wedge u); v, u \in \mathbb{R}^3 \quad (22)$$

**Demonstração 4.1.** Como  $u$  e  $v$  pertencem a  $\mathbb{R}^3$ , eles podem ser escritos como

$$\begin{aligned} u &= u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3 \\ v &= v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 \end{aligned}$$

em que  $(e_1, e_2, e_3)$  formam a base do espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$ .

Usando a associatividade do produto exterior, temos que

$$\begin{aligned} v \wedge u &= v_1 u_1 e_1 \wedge e_1 + v_1 u_2 e_1 \wedge e_2 + v_1 u_3 e_1 \wedge e_3 \\ &\quad + v_2 u_1 e_2 \wedge e_1 + v_2 u_2 e_2 \wedge e_2 + v_2 u_3 e_2 \wedge e_3 \\ &\quad + v_3 u_1 e_3 \wedge e_1 + v_3 u_2 e_3 \wedge e_2 + v_3 u_3 e_3 \wedge e_3 \end{aligned}$$

Com o auxílio das equações (17) é possível mostrar que  $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_i = 0$  e, usando a anticomutatividade do produto externo, a equação anterior se reduz a

$$\begin{aligned} v \wedge u &= (v_1 u_2 - u_1 v_2) e_1 \wedge e_2 + (v_1 u_3 - u_1 v_3) e_1 \wedge e_3 \\ &\quad + (v_2 u_3 - u_2 v_3) e_2 \wedge e_3 \end{aligned}$$

Usando novamente a equação (17), chegamos a

$$v \wedge u = (v_1 u_2 - u_1 v_2) e_1 e_2 + (v_1 u_3 - u_1 v_3) e_1 e_3 + (v_2 u_3 - u_2 v_3) e_2 e_3.$$

Aplicando agora o isomorfismo de Hodge no primeiro termo na equação com  $\Omega = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$  e usando  $e^i \rfloor e_j = e^i(e_j) = \delta^i_j$ , obtém-se o resultado desejado

$$\star(v \wedge u) = (v_1 u_2 - u_1 v_2) \mathbf{e}_3 + (v_1 u_3 - u_1 v_3) \mathbf{e}_2 + (v_2 u_3 - u_2 v_2) \mathbf{e}_1 = v \times u$$

## 5 Álgebra de Clifford

Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  equipado com uma forma bilinear simétrica  $g$ ,  $\mathbb{A}$  uma álgebra associativa com unidade  $1_{\mathbb{A}}$  e  $\gamma$  uma aplicação linear  $\gamma: V \rightarrow \mathbb{A}$ . Definimos uma álgebra de Clifford ( $Cl$ ) como

**Definição 5.1.** (Álgebra de Clifford) Uma álgebra de Clifford é o par  $(\mathbb{A}, \gamma)$  para o espaço quadrático  $(V, g)$  quando  $\mathbb{A}$  é gerada como uma álgebra por  $\{\gamma(v) | v \in V\}$  com  $\gamma$  satisfazendo

$$\gamma(v)\gamma(u) + \gamma(u)\gamma(v) = 2g(v, u)1_{\mathbb{A}}$$

Para todo  $v, u \in V$ .

Considerando uma base ortonormal  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  em  $V$  na álgebra de Clifford  $(\mathbb{A}, \gamma)$  para  $(V, g)$  temos:

$$\gamma(e_i)\gamma(e_j) + \gamma(e_j)\gamma(e_i) = 0 \iff i \neq j$$

$$\gamma(e_i)^2 = Q(e_i)1_{\mathbb{A}} = q(e_i, e_i)1_{\mathbb{A}}$$

Tem-se então que  $\mathbb{A}$  é gerada pelos produtos da forma

$$\mathbb{A} = \text{span}(\gamma(e_1)^{\mu_1} \gamma(e_2)^{\mu_2} \dots \gamma(e_n)^{\mu_n} | \mu_i = 0, 1)$$

Como o número de elementos da forma  $\gamma(e_1)^{\mu_1} \gamma(e_2)^{\mu_2} \dots \gamma(e_n)^{\mu_n}$  com  $\mu_i = 0, 1$  é  $2^n$  a dimensão de  $\mathbb{A}$  é  $\dim \mathbb{A} \leq 2^n$ . A álgebra de Clifford  $(\mathbb{A}, \gamma)$  para o espaço quadrático  $(V, g)$  é chamada de universal quando  $\dim \mathbb{A} = 2^n$  e é denotada  $Cl(V, g)$  ou  $Cl(V)$ . É feita uma simplificação na anotação de  $\gamma(e_i)$  para  $\gamma_i$  para  $\mathbf{e}_i$ .

### 5.1 Produto de Clifford

Na álgebra de Clifford foi definido um produto geométrico. Nesse produto geométrico estão simultaneamente presentes o produto interno (contração) e o produto exterior.

**Definição 5.2.** Sejam  $v$  e  $u$  vetores  $\in \mathbb{R}^n$  definimos o produto geométrico como:

$$vu = v \wedge u + v \rfloor u \tag{23}$$

Como a álgebra de Clifford é construída em cima da álgebra de Grassmann temos que os elementos multivetoriais da álgebra exterior também estão presentes na álgebra geométrica, pode-se então generalizar a definição de produto geométrico para:

**Definição 5.3.** *Sejam  $v \in \mathbb{R}^n$  um vetor e  $A_{[p]} \in \Lambda(\mathbb{R})$  um  $p$ -vetor definimos o produto geométrico como:*

$$vA_{[p]} = v \wedge A_{[p]} + v \lrcorner A_{[p]}$$

O produto geométrico goza de propriedades como a associatividade, proveniente do produto exterior de Grassmann, e da invertibilidade, proveniente do produto da álgebra Hamiltoniana.

## 5.2 Espaços $\mathbb{R}^{p,q}$

**Definição 5.4.** *Um espaço  $\mathbb{R}^{p,q}$  é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais com dimensão  $\dim \mathbb{R}^{p,q} = n = p + q$  cujo o produto interno das bases  $g(e_i, e_i) = 1$  com  $i = (1, 2, \dots, p)$  e  $g(e_j, e_j) = -1$  com  $j = (p + 1, p + 2, \dots, n)$ .*

Uma álgebra de Clifford sobre o espaço vetorial  $\mathbb{R}^{p,q}$  é chamada de  $Cl_{p,q}(\mathbb{R})$ . Um elemento de  $Cl_{p,q}(\mathbb{R})$  é formado por qualquer combinação das bases.

**Exemplo 5.1.** *Seja  $p = 2$  e  $q = 1$  um elemento  $(\Psi)$  de  $Cl_{2,1}(\mathbb{R})$  é da forma:*

$$\begin{aligned} \Psi = & \alpha + a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 + a_{1,2} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + a_{1,3} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + a_{2,3} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + a_{2,1} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + a_{3,1} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 \\ & + a_{3,2} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 + a_{3,2} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 + a_{1,2,3} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

*Fazendo uso da equação (23) fica claro que  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i$  e  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = \pm 1$ . É possível então reorganizar os termos de forma a simplificar a equação.*

$$Cl_{2,1} \ni \Psi = \alpha + b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3 + b_{1,2} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + b_{1,3} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + b_{2,3} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + b_{1,2,3} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$$

*Onde o termo  $b_{i,j} = a_{i,j} - a_{j,i}$ .*

## 5.3 Operador Nabla ( $\nabla$ ) e Operador $\mathcal{D}$

O operador Nabla é um operador construído por derivadas parciais e vetores de base ortonormais, ele é definido como:

$$\vec{\nabla} = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

O operador Nabla só tem sentido quando atua em funções diferenciáveis.

Com o operador nabla definido, é possível definir um segundo operador ( $\mathcal{D}$ ) como:

$$\mathcal{D} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla} \quad (24)$$

Esse operador  $\mathcal{D}$  tem papel fundamental no eletromagnetismo. Ele é usado para representar as equações de Maxwell na forma tensorial.

## 5.4 Equações de Maxwell

As equações de Maxwell juntamente com a lei da força de Lorentz representam o eletromagnetismo clássico, elas são:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

## 5.5 Equações de Maxwell em $Cl_{3,0}(V)$

Olhando para as equações de Maxwell nota-se a presença dos operadores diferenciais rotacional e divergente além da derivada temporal. E de se esperar que seja possível representar as equações de Maxwell na álgebra de Clifford por meio do operador  $\mathcal{D}$ , pois segundo as equações (19, 22, 23) é possível representar o produto interno e o produto vetorial na álgebra de Clifford.

Olhando para as equações de Maxwell em  $\mathbb{R}^3$  nota-se que os operadores diferenciais estão sendo aplicados em dois vetores, o vetor do campo elétrico  $\vec{E}$  e o vetor do campo magnético  $\vec{B}$ . Define-se então um novo vetor  $\mathcal{F}$  como a soma do campo elétrico com o campo magnético.

$$\mathcal{F} = \frac{1}{c} \vec{E} + \vec{B}$$

Onde os vetores  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  podem ser escritos como:

$$\vec{E} = E_1 \mathbf{e}_1 + E_2 \mathbf{e}_2 + E_3 \mathbf{e}_3$$

$$\vec{B} = B_1 \mathbf{e}_1 + B_2 \mathbf{e}_2 + B_3 \mathbf{e}_3$$

Aplicando então o operador  $\mathcal{D}$  no vetor  $\mathcal{F}$  obtém-se:

$$\mathcal{D}\mathcal{F} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla}\right) \left(\frac{1}{c} \vec{E} + \vec{B}\right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \wedge \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \wedge \vec{B} + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{1}{c} \nabla \lrcorner \vec{E} + \nabla \wedge \vec{B} + \nabla \lrcorner \vec{B} \quad (25)$$

Onde já foi usado o fato de que a contração de um escalar é zero para a contração do operador  $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$ .

O primeiro termo do lado direito é a contração de um vetor por um escalar, o que resulta apenas na aplicação da derivada temporal no vetor campo elétrico.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \wedge \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (26)$$

O termo  $\nabla \rfloor \vec{E}$  resulta em:

$$\nabla \rfloor \vec{E} = \frac{\partial E_1}{\partial x_1} \mathbf{e}^1 \rfloor \mathbf{e}_1 + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} \mathbf{e}^2 \rfloor \mathbf{e}_2 + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} \mathbf{e}^3 \rfloor \mathbf{e}_3 = \frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} = \nabla \cdot \vec{E} \quad (27)$$

O termo  $\nabla \wedge \vec{E}$  é o produto exterior de dois vetores que resulta

$$\nabla \wedge \vec{E} = \frac{\partial E_1}{\partial x_2} e_2 \wedge e_1 + \frac{\partial E_1}{\partial x_3} e_3 \wedge e_1 + \frac{\partial E_2}{\partial x_1} e_1 \wedge e_2 + \frac{\partial E_2}{\partial x_3} e_3 \wedge e_2 + \frac{\partial E_3}{\partial x_1} e_1 \wedge e_3 + \frac{\partial E_3}{\partial x_2} e_2 \wedge e_3$$

Usando a anticomutatividade do produto exterior (equação 17) obtém-se.

$$\nabla \wedge \vec{E} = (\nabla \times \vec{E}) \Omega_v \quad (28)$$

Olhando para o termo  $\nabla \wedge \vec{B}$  temos:

$$\nabla \wedge \vec{B} = \frac{\partial B_2}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + \frac{\partial B_3}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + \frac{\partial B_1}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 + \frac{\partial B_3}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + \frac{\partial B_1}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 + \frac{\partial B_2}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2$$

Comparando o resultado acima com a equação(22) possível chegar a conclusão de que há um problema na definição do vetor  $\mathcal{F}$ . O problema aparece ao tentar representar o produto vetorial pelo produto externo. Segundo a equação(22) é necessário que haja a aplicação do dual de Hodges no produto exterior para que ele seja igual ao produto vetorial.

Para arrumar esse problema muda-se a definição do vetor  $\mathcal{F}$ , define-se então  $\mathcal{F}$  como o multivetor

$$\mathcal{F} = \frac{1}{c} \vec{E} + \vec{B} \Omega_v$$

Onde  $\Omega_v$  é o 3 – vetor unitário,  $\Omega_v = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ .

Essa mudança é feita com o objetivo de obter um dual de Hodge nos termos contendo  $\vec{B}$ . Refazendo as contas com o novo multivetor  $\mathcal{F}$ .

$$\mathcal{D}\mathcal{F} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla}\right) \left(\frac{1}{c} \vec{E} + \vec{B} \Omega_v\right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \wedge \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \wedge \vec{B} \Omega_v + \frac{1}{c} \nabla \wedge \vec{E} + \frac{1}{c} \nabla \rfloor \vec{E} + \nabla \wedge \vec{B} \Omega_v + \nabla \rfloor \vec{B} \Omega_v \quad (29)$$

Os termos contendo  $\vec{E}$  não foram alterados, assim o primeiro, o terceiro e o quinto termo da equação (29) não foram modificados, então as equações(26,27,28) ainda são validas.

Abrindo o termo  $\vec{B} \Omega_v$ ,

$$\vec{B} \Omega_v = \vec{B} \wedge \Omega_v + \vec{B} \rfloor \Omega_v$$

Como  $\Omega_v$  é composto do produto exterior das bases qualquer que seja o termo de  $\vec{B}$  é possível mudar a ordem dos termos de modo a ter  $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_i$  que é zero

$$B_1(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1) \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = 0$$

$$-B_2(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2) \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 = 0$$

$$B_3(\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_3) \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = 0$$

Então  $\vec{B} \wedge \Omega_v = 0$ . Resolvendo a parte da contração.

$$\vec{B} \lrcorner \Omega = B_1(\mathbf{e}^1 \lrcorner \mathbf{e}_1) \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 - B_2(\mathbf{e}^2 \lrcorner \mathbf{e}_2) \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + B_3(\mathbf{e}^3 \lrcorner \mathbf{e}_3) \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$$

Onde está sendo usado o fato de que as bases são ortogonais, ou seja,  $\mathbf{e}^i \lrcorner \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{i,j}$ . O resultado final de  $\vec{B} \lrcorner \Omega_v$  é:

$$\vec{B} \lrcorner \Omega_v = B_1 \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + B_2 \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 + B_3 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$$

Fazendo o produto exterior operador nabla com o resultado obtido acima chega-se na mesma situação do produto exterior de  $\vec{B}$  com  $\Omega_v$ , os resultados não nulos são:

$$\nabla \wedge \vec{B} \lrcorner \Omega_v = \left( \frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \quad (30)$$

Esse resultado pode ser reescrito como  $(\nabla \cdot \vec{B}) \Omega_v$ .

Fazendo a contração do nabla pelo 2 – vetor  $\vec{B} \lrcorner \Omega_v$ .

$$\begin{aligned} \nabla \lrcorner \vec{B} \lrcorner \Omega_v &= -\frac{\partial B_2}{\partial x_1} (\mathbf{e}^1 \lrcorner \mathbf{e}_1) \wedge \mathbf{e}_3 + \frac{\partial B_3}{\partial x_1} (\mathbf{e}^1 \lrcorner \mathbf{e}_1) \wedge \mathbf{e}_2 + \frac{\partial B_1}{\partial x_2} (\mathbf{e}^2 \lrcorner \mathbf{e}_2) \wedge \mathbf{e}_3 \\ &\quad - \frac{\partial B_3}{\partial x_2} (\mathbf{e}^2 \lrcorner \mathbf{e}_2) \wedge \mathbf{e}_1 - \frac{\partial B_1}{\partial x_3} (\mathbf{e}^3 \lrcorner \mathbf{e}_3) \wedge \mathbf{e}_2 + \frac{\partial B_2}{\partial x_3} (\mathbf{e}^3 \lrcorner \mathbf{e}_3) \wedge \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

Reorganizando os termos

$$\nabla \lrcorner \vec{B} \lrcorner \Omega_v = \left( \frac{\partial B_1}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_3 + \left( \frac{\partial B_3}{\partial x_1} - \frac{\partial B_1}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_2 + \left( \frac{\partial B_2}{\partial x_3} - \frac{\partial B_3}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_1$$

Comparando o resultando obtido com o rotacional de um vetor chega-se a conclusão que:

$$\nabla \lrcorner \vec{B} \lrcorner \Omega_v = -\nabla \times \vec{B} \quad (31)$$

De maneira análoga a equação(26), o produto exterior da derivada parcial pelo multivetor  $\vec{B} \lrcorner \Omega_v$  resulta na aplicação da derivada no multivetor.

$$\frac{\partial}{\partial t} \wedge \vec{B} \lrcorner \Omega_v = \frac{\partial \vec{B} \lrcorner \Omega_v}{\partial t} \quad (32)$$

Pegando os resultados obtidos nas equações(26,27,28,30,31,32) e separando por grau.

Para 0 – *vetor* tem-se

$$\frac{1}{c} \nabla \rfloor \vec{E} = \frac{1}{c} \nabla \cdot \vec{E} \quad (33)$$

Para 1 – *vetor* tem-se

$$-\nabla \times \vec{B} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (34)$$

Para 2 – *vetor* foi obtido:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B} \Omega_v}{\partial t} + \frac{1}{c} (\nabla \times \vec{E}) \Omega_v \quad (35)$$

E para 3 – *vetor* obteve-se:

$$(\nabla \cdot \vec{B}) \Omega_v \quad (36)$$

Olhando as equações (33,34,35,36) e comparando com as equações de Maxwell é possível chegar a conclusão que se definir um multivetor  $\mathcal{J}$  como:

$$\mathcal{J} = \rho - \frac{1}{c} \vec{J}$$

Onde  $\rho$  é um escalar e  $\vec{J}$  é um vetor de modo a fazer com que os termos 2 – *vetor* e 3 – *vetor* sejam iguais a zero. Temos que as quatro equações de Maxwell podem ser escritas como

$$\mathcal{D}\mathcal{F} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \mathcal{J} \quad (37)$$

## 5.6 Equações de Maxwell em $Cl_{1,3}(V)$

Sabe-se que as equações de Maxwell são invariantes por transformações de Lorentz, ou seja ao fazer uma mudança de coordenadas no espaço de Minkowski as equações de Maxwell se mantém. Por isso há um interesse em escrever as equações de Maxwell no espaço  $\mathbb{R}^{1,3}$ , normalmente se obtém as equações de Maxwell em  $\mathbb{R}^{1,3}$  por meio de tensores. No nosso caso o interesse seria obter essas equações por meio da álgebra de Clifford.

Para escrever as equações de Maxwell em  $Cl_{1,3}$  começa-se introduzindo dois 2 – *vetores* e definindo o operador de Dirac.

O primeiro 2 – *vetor* a ser introduzido é:  $\mathbf{E} = \vec{E}\mathbf{e}_0$ , já o segundo é:  $\mathbf{B} = \vec{B}\mathbf{e}_0$ . Como os vetores  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são formados pelas bases  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  ao abrir o produto geométrico de clifford a parte da contração será zero pois  $e^0 \rfloor e_i = 0, i = 1, 2, 3$ . Então o produto  $\vec{E}\mathbf{e}_0$  resulta em:

$$\mathbf{E} = \vec{E}\mathbf{e}_0 = E_1\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_0 + E_2\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_0 + E_3\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_0$$

O mesmo se aplica ao produto  $\vec{B}\mathbf{e}_0$

$$\mathbf{B} = \vec{B}\mathbf{e}_0 = B_1\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_0 + B_2\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_0 + B_3\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_0$$

O operador de Dirac( $\partial$ ) é então redefinido como:

$$\partial = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{e}_0 + \vec{\nabla}$$

Nota-se que a única diferença entre o operador de Dirac e o operador  $\mathcal{D}$ (equação 24) é que agora a derivada parcial temporal é um vetor.

Seguindo a mesma linha de raciocínio usada para colocar as equações de Maxwell na álgebra de Clifford  $Cl_{3,0}$  define-se um multivetor  $\mathcal{F}$  como:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{c}\mathbf{E} - \Omega_v\mathbf{B}$$

Onde agora o termo  $\Omega_v$  é um 4-*vetor* unitário,  $\Omega_v = \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ . Aplicando o operador de Dirac no multivetor  $\mathcal{F}$ .

$$\partial\mathcal{F} = \left(\mathbf{e}_0 \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla}\right)\left(\frac{1}{c}\mathbf{E} - \Omega_v\mathbf{B}\right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{e}_0\mathbf{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{e}_0\Omega_v\mathbf{B} + \frac{1}{c}\nabla\mathbf{E} - \nabla\Omega_v\mathbf{B} \quad (38)$$

Todos os elementos de  $\mathbf{E}$  são 2-*vetores* contendo o termo  $\mathbf{e}_0$  então ao fazer o produto externo de  $\mathbf{e}_0$  com  $\mathbf{E}$  é sempre possível reorganizar os termos de modo a ficar com  $\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_0 = 0$

$$\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{E} = -E_1(\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_0) \wedge \mathbf{e}_1 = 0$$

$$\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{E} = -E_2(\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_0) \wedge \mathbf{e}_2 = 0$$

$$\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{E} = -E_3(\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_0) \wedge \mathbf{e}_3 = 0$$

A contração do 2-*vetor*  $\mathbf{E}$  por  $\mathbf{e}_0$  resulta em:

$$\mathbf{e}^0 \lrcorner \mathbf{E} = -E_1(\mathbf{e}^0 \lrcorner \mathbf{e}_0) \wedge \mathbf{e}_1 - E_2(\mathbf{e}^0 \lrcorner \mathbf{e}_0) \wedge \mathbf{e}_2 - E_3(\mathbf{e}^0 \lrcorner \mathbf{e}_0) \wedge \mathbf{e}_3$$

Combinando os resultados obtidos para  $\mathbf{e}_0\mathbf{E}$  chega-se a conclusão que o termo o primeiro termo do lado direito da equação (38) é um 1-*vetor*.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{e}_0\mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (39)$$

O segundo termo do lado direito da equação (38) envolve o produto geométrico de  $\mathbf{e}_0\Omega_v\mathbf{B}$ , abrindo esse produto tem-se:

$$\mathbf{e}_0\Omega_v\mathbf{B} = \mathbf{e}_0 \wedge (\Omega_v\mathbf{B}) + \mathbf{e}_0 \lrcorner (\Omega_v\mathbf{B}) \quad (40)$$

Abrindo o termo  $\Omega_v\mathbf{B}$ .

$$\Omega_v\mathbf{B} = \Omega_v \wedge \mathbf{B} + \Omega_v \lrcorner \mathbf{B}$$

Análogo ao feito com o produto geométrico  $\mathbf{e}_0\mathbf{E}$ , o produto externo  $\Omega_v \wedge \mathbf{B}$  é nulo e a contração resulta em:

$$\begin{aligned}\Omega_v \rfloor \mathbf{B} &= -B_1 \Omega_v \rfloor (\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_1) - B_2 \Omega_v \rfloor (\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_2) - B_3 \Omega_v \rfloor (\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_3) \\ \Omega_v \rfloor \mathbf{B} &= -B_1 \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 - B_2 \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 - B_3 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\end{aligned}$$

Voltando na expressão do produto geométrico de  $\mathbf{e}_0 \Omega_v \mathbf{B}$  (equação 40)

$$\mathbf{e}_0 \Omega_v \mathbf{B} = -B_1 \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 - B_2 \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 - B_3 \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$$

Onde a contração some pois não há termos com  $e_0$  em  $\Omega_v \mathbf{B}$ .

Então o segundo termo da equação (38) gera um 3 – vetor

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{e}_0 \Omega_v \mathbf{B} = -\frac{1}{c} \left( \frac{\partial B_1}{\partial t} \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + \frac{\partial B_2}{\partial t} \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 + \frac{\partial B_3}{\partial t} \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \right) \quad (41)$$

Analisando  $\frac{1}{c} \nabla \mathbf{E}$

$$\frac{1}{c} \nabla \mathbf{E} = \frac{1}{c} (\nabla \wedge \mathbf{E} + \nabla \rfloor \mathbf{E})$$

A contração resulta em:

$$\nabla \rfloor \mathbf{E} = \frac{\partial E_1}{\partial x_1} \mathbf{e}_0 + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} \mathbf{e}_0 + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} \mathbf{e}_0 = (\nabla \cdot \vec{E}) \mathbf{e}_0$$

Para o produto exterior  $\nabla \wedge \mathbf{E}$ :

$$\begin{aligned}\nabla \wedge \mathbf{E} &= \frac{\partial E_2}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_0 + \frac{\partial E_3}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_0 + \frac{\partial E_1}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_0 + \frac{\partial E_3}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_0 + \\ &\quad \frac{\partial E_1}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_0 + \frac{\partial E_2}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_0\end{aligned}$$

Reorganizando os termos

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = \left( \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_0 + \left( \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_0 + \left( \frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_0 \quad (42)$$

Então o produto geométrico  $\frac{1}{c} \nabla \mathbf{E}$  resulta em um 1 – vetor e em um 3 – vetor

$$\frac{1}{c} \nabla \mathbf{E} = \frac{1}{c} (\nabla \cdot \vec{E}) \mathbf{e}_0 + \frac{1}{c} \nabla \wedge \mathbf{E} \quad (43)$$

O ultimo termo da equação (38) é  $\nabla \Omega_v \mathbf{B}$ , colocando ele na representação geométrica de Clifford.

$$\nabla \Omega_v \mathbf{B} = \nabla \wedge (\Omega_v \mathbf{B}) + \nabla \rfloor (\Omega_v \mathbf{B})$$

Abrindo o produto exterior  $\nabla \wedge (\Omega_v \mathbf{B})$

$$\nabla \wedge (\Omega_v \mathbf{B}) = -\nabla \wedge (B_1 \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + B_2 \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 + B_3 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)$$

$$\nabla \wedge (\Omega_{\nu} \mathbf{B}) = -\left(\frac{\partial B_1}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 + \frac{\partial B_3}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\right)$$

$$\nabla \wedge (\Omega_{\nu} \mathbf{B}) = -(\nabla \cdot \vec{B}) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$$

Para a contração:

$$\nabla \lrcorner (\Omega_{\nu} \mathbf{B}) = \frac{\partial B_1}{\partial x_2} \mathbf{e}_3 - \frac{\partial B_1}{\partial x_3} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial B_2}{\partial x_3} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial B_2}{\partial x_1} \mathbf{e}_3 + \frac{\partial B_3}{\partial x_1} \mathbf{e}_2 - \frac{\partial B_3}{\partial x_2} \mathbf{e}_1$$

$$\nabla \lrcorner (\Omega_{\nu} \mathbf{B}) = \left(\frac{\partial B_2}{\partial x_3} - \frac{\partial B_3}{\partial x_2}\right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial B_1}{\partial x_3} - \frac{\partial B_3}{\partial x_1}\right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial B_1}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_1}\right) \mathbf{e}_3$$

$$\nabla \lrcorner (\Omega_{\nu} \mathbf{B}) = -(\nabla \times \vec{B})$$

Então  $\nabla \Omega_{\nu} \mathbf{B}$  é:

$$\nabla \Omega_{\nu} \mathbf{B} = -(\nabla \cdot \vec{B}) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 - (\nabla \times \vec{B}) \quad (44)$$

Substituindo as equações(39,41,42,43,44) na equação (38)

$$\partial \mathcal{F} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{e}_0 \Omega_{\nu} \mathbf{B} + \frac{1}{c} (\nabla \cdot \vec{E}) \mathbf{e}_0 + \frac{1}{c} \nabla \wedge \mathbf{E} + (\nabla \cdot \vec{B}) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + (\nabla \times \vec{B})$$

As equações acima podem ser separadas em dois grupos. O primeiro grupo que vem do produto externo  $\partial \wedge \mathcal{F}$

$$\partial \wedge \mathcal{F} = +(\nabla \cdot \vec{B}) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + \frac{1}{c} (\nabla \wedge \mathbf{E}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{e}_0 \Omega_{\nu} \mathbf{B}$$

Comparando as equações desse grupo com as equações de Maxwell é possível chegar a conclusão que se  $\partial \wedge \mathcal{F} = 0$  temos uma parte das equações de Maxwell:

$$(\nabla \cdot \vec{B}) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (45)$$

$$\left(\frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2}\right) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_0 = -\frac{\partial B_3}{\partial t} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_0$$

$$\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1}\right) \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_0 = -\frac{\partial B_2}{\partial t} \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_0$$

$$\left(\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3}\right) \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_0 = -\frac{\partial B_1}{\partial t} \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (46)$$

Esse primeiro grupo então é chamado de equação homogênea. O segundo grupo de equações são as que vem da contração  $\partial \rfloor \mathcal{F}$

$$\partial \rfloor \mathcal{F} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c} (\nabla \cdot \vec{E}) \mathbf{e}_0 + (\nabla \times \vec{B})$$

Comparando com o restante das equações de Maxwell é possível chegar a conclusão de que  $\partial \rfloor \mathcal{F} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \mathbf{J}$ , onde  $\mathbf{J}$  é um quadrivetor definido como:

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{e}_0 + \vec{j}$$

De modo a ter:

$$(\nabla \cdot \vec{E}) \mathbf{e}_0 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \mathbf{e}_0 \quad (47)$$

$$(\nabla \times \vec{B}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \vec{j} \quad (48)$$

O segundo grupo de equações é chamado de equação não-homogênea. Tem-se então que as equações de Maxwell podem ser representadas em  $Cl_{1,3}$  como:

$$\partial \mathcal{F} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \mathbf{J} \quad (49)$$

## Referências

- [1] Coelho, U. F.; Lourenço, L. M. *Um curso de Álgebra Linear*. 3ª edição. São Paulo: EDUSP, 2013. 263p
- [2] Vaz Junior, J.; Junior, R.R. *Álgebras de Clifford e Espinores*. 1ª edição. São Paulo: Livraria da Física, 2012. 248p
- [3] Jancewicz, B. *Multivectors and Clifford Algebra in Electrodynamics*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1988. 428p
- [4] Amado, C.R. *Aplicação da Álgebra Geométrica do Espaço-Tempo de Minkowski à Óptica Relativista*. 2009.127f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores) - Universidade Técnica De Lisboa, Universidade Técnica De Lisboa, Lisboa, 2009

# Calculation of Interaction between Ferromagnetic Solids Simplified by Symmetry Considerations

LEONARDO LUIZ E CASTRO\*  
OLAVO LEOPOLDINO DA SILVA FILHO  
MARCOS TIAGO DE AMARAL E ELOI

Instituto de Física, Universidade de Brasília

## Resumo

*We discuss the integration of magnetic interaction between spheres and other solids. We show how to use tensors and their eigenvalues in that calculation in order to take advantage of symmetry properties to simplify the expressions. The calculation is gradually restricted to more symmetrical structures, until we reach the case of two homogeneously magnetized spheres arbitrarily positioned and oriented. This work may help future calculations of interaction between more complex objects, such as spheres with inhomogeneous magnetization, ellipsoids and partially paramagnetic solids.*

Keywords: ferromagnetism, spheres, solid, magnetization

## I. INTRODUCTION

Amikam Aharoni [1] calculated the interaction energy between a ferromagnetic sphere and a paramagnetic one. The ferromagnetic sphere presents magnetization along a fixed direction in its whole volume, while the paramagnetic sphere presents magnetization aligned with the external applied magnetic field in each point of its volume. In order to perform that calculation, he used the propriety that the magnetic field that a uniformly magnetized sphere generates *outside* its volume is equivalent to that of a point dipole in its center [2]. Although not very simple, that calculation is facilitated by the fact that the magnetization is considered to be completely aligned with the applied magnetic field, which means that the core of the calculation is integrating the field generated by a dipole over a spherical volume of arbitrary radius and position.

The field that a ferromagnetic sphere generates in the volume of another ferromagnetic sphere, however, is not aligned (in general) with the magnetization of the latter. Usually, some theorems are used to simplify

---

\*lcastro@unb.br

the calculation, but they are not applicable if the system differs from two perfect spheres with continuous, fixed bulk magnetization. Magnetic nanoparticles, for instance, might have *size effects* [3, 4], such as weakening of magnetization towards their borders. In order to calculate the interaction between two solids with those kinds of specific behavior, it is very helpful to be able to calculate the interaction between simpler solids by direct integration over their volume elements. In order to be able to generalize the calculation, we arrive at that same result by direct integration over infinitesimal interacting volume elements, and we show that a tensorial approach might be more useful for some systems.

## II. FROM DIPOLAR FIELD TO DIPOLAR INTERACTION

One could argue that, as the magnetic field generated by a ferromagnetic sphere is “dipolar” in the outside region, it is obvious that the interaction energy between two ferromagnetic spheres is also “dipolar”, i.e., the interaction energy between two point dipoles. However, this is not that straightforward if we consider basic electrostatic calculations. That conclusion could be taken from Newton’s Third Law,  $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$ , where  $\vec{F}_{AB}$  is the force in sphere  $A$  due to sphere  $B$  (and vice-versa for  $\vec{F}_{BA}$ ), or, in terms of potential energy,  $\frac{dU(\vec{r}_{AB})}{dx_A} = -\frac{dU(\vec{r}_{BA})}{dx_B}$ , where  $U$  is the potential energy,  $\vec{r}_{AB}$  is the position of the center of sphere  $A$  in relation to the center of sphere  $B$  (and vice-versa) and  $x$  is a Cartesian coordinate. This only restricts  $U$  to a certain class of functions.

As the energy interaction between magnetic objects also generates rotation of those objects about axes passing through their own centers, we need to consider the “Rotational Newton’s Third Law” [5] as well:

$$\vec{\tau}_{AB} = -\vec{\tau}_{BA}, \quad (1)$$

where  $\tau$ ’s are the two spheres’ reciprocal torques. The torque generated by a field  $\vec{B}$  on a point dipole  $m$  is  $\tau = -\vec{m} \times \vec{B}$ , so, Eq. 1 can be integrated as

$$\int_{V_A} [\vec{M}_a \times \vec{B}_{aB}] dV_a = - \int_{V_B} [\vec{M}_b \times \vec{B}_{bA}] dV_b, \quad (2)$$

where the  $V$ ’s are the volumes of the spheres. It is known that “the average magnetic field due to steady currents outside the sphere is the same as the field they produce at the center” (see *exercise 5.57* of Ref. [6]). Considering that the field generated by each sphere is due to steady currents in their atoms, and that the  $\vec{M}$ ’s are fixed inside each sphere, Eq. 2 becomes

$$\vec{m}_A \times \vec{B}_{AB} = -\vec{m}_B \times \vec{B}_{BA}.$$

This equation is a better indication that the spheres interact as dipoles, at least with respect to rotation.

## III. MAGNETOSTATIC INTERACTION BETWEEN TWO SPHERES

An explicit direct calculation of the interaction between two perfect ferromagnetic spheres might be useful not only to show that the result is dipolar, but also to extend the calculation to other types of magnetization distribution. For instance, there are magnetic nanoparticles that are gradually less

ferromagnetic from its center towards the surface along the radial direction, what could be expressed by means of a radial function inside the integrals.

In order to perform the integration between two ferromagnetic spheres, we are going to consider that some sphere  $A$  generates a dipolar magnetic field that interacts with infinitesimal magnetic dipole moments that occupy the whole volume of a sphere  $B$ . That is to say that we are going to integrate, over the volume of sphere  $B$ , the magnetic interaction energy between two point magnetic dipoles:

$$U_{mag(ij)} = \frac{\mu}{4\pi} \left( \frac{\vec{m}_i \cdot \vec{m}_j}{r_{ji}^3} - 3 \frac{(\vec{m}_i \cdot \vec{r}_{ji})(\vec{m}_j \cdot \vec{r}_{ji})}{r_{ji}^5} \right),$$

where  $\mu$  is the mean magnetic permeability,  $\vec{m}_i$  and  $\vec{m}_j$  are the magnetic dipoles of two interacting particles  $i$  and  $j$ ,  $\vec{r}_{ji}$  is the vector that describes the position of particle  $j$  in relation to particle  $i$ .

So, the energy between two infinitesimal dipoles, one in sphere  $A$  and the other in sphere  $B$ , is written as

$$dU_{ab} = \frac{\mu}{4\pi} \left[ \frac{d\vec{m}_a \cdot d\vec{m}_b}{r_{bA}^3} - \frac{3(d\vec{m}_a \cdot \vec{r}_{bA})(d\vec{m}_b \cdot \vec{r}_{bA})}{r_{bA}^5} \right], \quad (3)$$

The magnetic dipolar field, generated by the first sphere of total magnetic dipole  $\vec{m}_A$  must be integrated over the volume of the second one, of constant volume magnetization  $\vec{M}_B$  (magnetic dipole per volume)

$$U_{AB} = \frac{\mu}{4\pi} m_A M_A \int_{V_b} \frac{1}{r_{bA}^3} \left\{ \hat{m}_A \cdot \hat{m}_B - 3(\hat{m}_A \cdot \hat{r}_{bA})(\hat{m}_B \cdot \hat{r}_{bA}) \right\} dV_B, \quad (4)$$

where  $m_A$  is the total dipole of sphere  $A$ ;  $M_B$  is the magnetization of sphere  $B$  and is written as a function of  $m_B$  and  $V_B$  as  $M_B = m_B/V_B$ , (or, in the general case of magnetization that may vary over volume,  $M_B = \frac{dm_b}{dV_b} \Rightarrow dm_B = M_B dV_B$ );  $\vec{r}_{bA}$  is the position of a volume element of sphere  $B$  in relation to the center of sphere  $A$ .

Now we define the direction of the vectors  $\vec{m}_A$ ,  $\vec{m}_B$  and  $\vec{r}$  in terms of spherical coordinate angles:

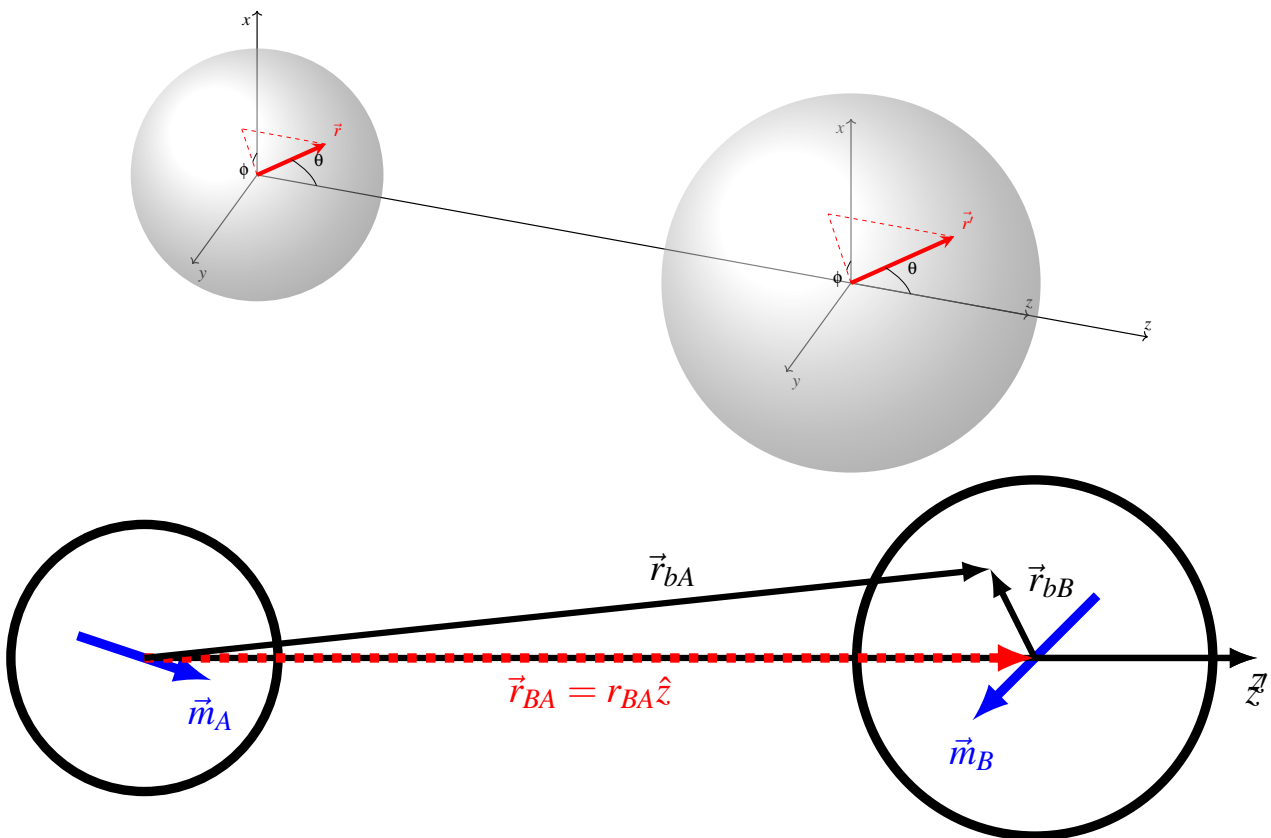
$$\begin{aligned} \hat{m}_A &= \sin \theta_{mA} \cos \phi_{mA} \hat{x} + \sin \theta_{mA} \sin \phi_{mA} \hat{y} + \cos \theta_{mA} \hat{z}, \\ \hat{m}_B &= \sin \theta_{mB} \cos \phi_{mB} \hat{x} + \sin \theta_{mB} \sin \phi_{mB} \hat{y} + \cos \theta_{mB} \hat{z}, \\ \hat{r}_{bA} &= \sin \theta_{bA} \cos \phi_{bA} \hat{x} + \sin \theta_{bA} \sin \phi_{bA} \hat{y} + \cos \theta_{bA} \hat{z}, \end{aligned}$$

from which it is easy to see that

$$\begin{aligned} \hat{m}_A \cdot \hat{m}_B &= \cos \theta_{mA} \cos \theta_{mB} + \sin \theta_{mA} \sin \theta_{mB} \cos (\phi_{mA} - \phi_{mB}), \\ \hat{m}_{mA} \cdot \hat{r}_{bA} &= \cos \theta_{mA} \cos \theta_{bA} + \sin \theta_{mA} \sin \theta_{bA} \cos (\phi_{mA} - \phi_{bA}), \\ \hat{m}_{mB} \cdot \hat{r}_{bA} &= \cos \theta_{mB} \cos \theta_{bA} + \sin \theta_{mB} \sin \theta_{bA} \cos (\phi_{mB} - \phi_{bA}). \end{aligned}$$

As the integration will be performed over the volume of sphere  $B$ , it is necessary to write  $\vec{r}_{bA}$ , the position of a volume element of sphere  $B$  in relation to the center of sphere  $A$  (the origin of our coordinate system), as a function of  $\vec{r}_{bB}$ , the position of a volume element of sphere  $B$  in relation to the center of sphere  $B$  itself,

$$\vec{r}_{bA} = r_{bB} \sin \theta_{bB} \cos \phi_{bB} \hat{x} + r_{bB} \sin \theta_{bB} \sin \phi_{bB} \hat{y} + (r_{BA} + r_{bB} \cos \theta_{bB}) \hat{z}.$$



**Figura 1:** Spherical coordinate systems for integration over the volume of two interacting spheres, with a cross section showing the position of a volume element of sphere B in relation to the center of both spheres A and B. In spherical coordinates,  $\vec{r}_{bA} \equiv (r_{bA}, \theta_{bA}, \phi_{bA})$  and  $\vec{r}_{bB} \equiv (r_{bB}, \theta_{bB}, \phi_{bB})$ .

From the identity  $r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r}$  applied to  $\vec{r}_{bA}$ , we get

$$r_{bA} = (r_{bB}^2 + r_{BA}^2 + 2r_{bB}r_{BA} \cos \theta_{bB})^{1/2}. \quad (5)$$

Equations 4, 5 and 5 yield

$$U_{AB} = \frac{\mu}{4\pi} m_A M_B \int_{V_B} \left[ \frac{A - 3B(\phi_{bA})C(\phi_{bA})}{(r^2 + R'^2 + 2r'R' \cos \theta')^{3/2}} \right] dV_B,$$

where

$$\begin{aligned} A &= \cos \theta_{mA} \cos \theta_{mB} + \sin \theta_{mA} \sin \theta_{mB} \cos(\phi_{mA} - \phi_{mB}), \\ B(\phi_{bA}) &= \cos \theta_{mA} \cos \theta_{bA} + \sin \theta_{mA} \sin \theta_{bA} \cos(\phi_{mA} - \phi_{bA}), \\ C(\phi_{bA}) &= \cos \theta_{mB} \cos \theta_{bA} + \sin \theta_{mB} \sin \theta_{bA} \cos(\phi_{mB} - \phi_{bA}), \end{aligned}$$

where the dependence on  $\theta_{bA}$  is highlighted because it is the only angle above that will vary in the integration. By performing the multiplication  $B(\phi_{bA})C(\phi_{bA})$ , and considering that, by symmetry, the integration of terms with single  $\cos(\phi_{mB} - \phi_{bA})$  or  $\cos(\phi_{mA} - \phi_{bA})$  (but not that with the two of them multiplied) equals zero, we get

$$\begin{aligned} U_{AB} &= \frac{\mu}{4\pi} m_A M_B \left\{ \int_{V_B} \frac{A}{(r_{bB}^2 + r_{BA}^2 + 2r_{bB}r_{BA} \cos \theta_{bB})^{3/2}} dV_b \right. \\ &\quad - 3 \left[ \cos \theta_{mA} \cos \theta_{mB} \int_{V_B} \frac{\cos^2 \theta_{bA}}{(r_{bB}^2 + r_{BA}^2 + 2r_{bB}r_{BA} \cos \theta_{bB})^{3/2}} dV_b \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin \theta_{mA} \sin \theta_{mB} \int_{V_B} \frac{\sin^2 \theta_{bA} \cos(\phi_a - \phi_{bA}) \cos(\phi_b - \phi_{bA})}{(r_{bB}^2 + r_{BA}^2 + 2r_{bB}r_{BA} \cos \theta_{bB})^{3/2}} dV_b \right] \right\}, \quad (6) \end{aligned}$$

We must change the numerators' dependence from  $r_{bA}$ ,  $\theta_{bA}$ ,  $\phi_{bA}$  to  $r_{bB}$ ,  $\theta_{bB}$ ,  $\phi_{bB}$  in order to be able to integrate the dipolar field from  $\vec{m}_A$  over  $V_B$ . A straightforward vector addition yields, for the z components (remember that  $r_{AB}$  is along the z-axis),  $r_{bA} \cos \theta_{bA} = r_{AB} + r_{bA} \cos \theta_{bB}$  that squared becomes

$$(r_{bA} \cos \theta_{bA})^2 = r_{AB}^2 + 2r_{AB}r_{bB} \cos \theta_{bB} + r_{bB}^2 \cos^2 \theta_{bB}. \quad (7)$$

Note also that the projections of  $\vec{r}_{bB}$  and  $\vec{r}_{bA}$  on the plane  $xy$  must be equal to each other because our choice of axes implies that Cartesian positions centered on the two sphere only differ in the z-component but not in the x and y components. So,

$$r_{bB} \sin \theta_{bB} = r_{bA} \sin \theta_{bA}, \quad (8)$$

and  $\phi_{bA} = \phi_{bB}$ , such that

$$r_{bA}^2 \sin^2 \theta_{bA} \cos(\phi_{mA} - \phi_{bA}) \cos(\phi_{mB} - \phi_{bA}) = r_{bB}^2 \sin^2 \theta_{bB} \cos(\phi_{mA} - \phi_{bB}) \cos(\phi_{mB} - \phi_{bB}). \quad (9)$$

Now, eq. 7 and eq. 9 may be used in eq. 6 to change the origin of its position coordinates from the center of sphere A to the center of sphere B.

$$\begin{aligned}
 U_{AB} = & \frac{\mu}{4\pi} m_A M_B \left\{ \int_{V_B} \frac{A}{(r_{bB}^2 + r_{BA}^2 + 2r_{bB}r_{BA} \cos \theta_{bB})^{3/2}} dV_b \right. \\
 & - 3 \left[ \cos \theta_{mA} \cos \theta_{mB} \int_{V_B} \frac{r_{AB}^2 + 2r_{AB}r_{bB} \cos \theta_{bB} + r_{bB}^2 \cos^2 \theta_{bB}}{((r_{bB}^2 + r_{BA}^2 + 2r_{bB}r_{BA} \cos \theta_{bB})^{5/2}} dV_b \right. \\
 & \left. \left. + \sin \theta_{mA} \sin \theta_{mB} \int_{V_b} \frac{F(r_{bB}, \theta_{bB}, \phi_{bB} | \phi_{mA}, \phi_{mB})}{(r_{bB}^2 + r_{BA}^2 + 2r_{bB}r_{BA} \cos \theta_{bB})^{5/2}} dV_b \right] \right\}, \quad (10)
 \end{aligned}$$

where the function  $F$  is

$$\begin{aligned}
 F(r_{bB}, \theta_{bB}, \phi_{bB} | \phi_{mA}, \phi_{mB}) &= \sin^2 \theta_{bB} \cos(\phi_{mA} - \phi_{bB}) \cos(\phi_{mB} - \phi_{bB}) \\
 &= \sin^2 \theta_{bB} [(\cos \phi_{mA} \cos \phi_{mB}) \cos^2 \phi_{bB} + (\sin(\phi_{mA} + \phi_{mB})) \sin \phi_{bB} \cos \phi_{bB} + (\sin \phi_{mA} \sin \phi_{mB}) \sin^2 \phi_{bB}]
 \end{aligned}$$

Two exponents in the denominators of eq. 10 changed from 3/2 to 5/2 because a factor  $r_{bA}^2$  have been added in both numerators and denominators in order to use eq. 7 and eq. 9, and the one in the denominator has been replaced again with eq. 5. Now, Eq. 10 does not depend on any variable centered on sphere  $A$ , but only on quantities that will remain constant during the integration ( $r_{AB}$ ,  $\theta_{AB}$ ,  $\theta_{mB}$ ,  $\phi_{mA}$ ,  $\phi_{mB}$ ) and on variables centered on sphere  $B$  ( $r_{bB}$ ,  $\theta_{bB}$ ,  $\phi_{bB}$ ). So, as we do not have variables with indices “bA” and “bB” to distinguish anymore, we can omit the index “bB” from now on and define  $dV_b = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ . By doing that and changing the variables as

$$[\xi = \cos \theta] \Rightarrow [d\xi = -\sin \theta d\theta] \Rightarrow \left[ \int_0^\pi \sin \theta d\theta \rightarrow - \int_1^{-1} d\xi \rightarrow \int_{-1}^1 d\xi \right], \quad (11)$$

we arrive at

$$\begin{aligned}
 U_{AB} = & \frac{\mu m_A M_B}{4\pi} \left\{ (\hat{m}_A \hat{m}_B) 2\pi \int_0^{R_B} \int_{-1}^1 \frac{r^2}{(r^2 + r_{BA}^2 + 2rr_{BA}\xi)^{3/2}} d\xi dr \right. \\
 & - 3(\cos \theta_{mA} \cos \theta_{mB}) 2\pi \int_0^{R_B} \int_{-1}^1 \frac{(r_{BA}^2 + 2rr_{BA}\xi + r^2\xi^2)r^2}{(r^2 + r_{BA}^2 + 2rr_{BA}\xi)^{5/2}} d\xi dr, \\
 & - 3(\sin \theta_{mA} \sin \theta_{mB}) \int_0^{R_B} \int_{-1}^1 \frac{r^4(1 - \xi^2)}{(r^2 + r_{BA}^2 + 2rr_{BA}\xi)^{5/2}} d\xi dr \\
 & \left. \times \int_0^{2\pi} [\cos \phi_{mA} \cos \phi_{mB} \cos^2 \phi + \sin(\phi_{mA} + \phi_{mB}) \cos \phi \sin \phi + \sin \phi_{mA} \sin \phi_{mB} \sin^2 \phi] d\phi \right\} \quad (12)
 \end{aligned}$$

where  $R_A$  and  $R_B$  are the radii of the spheres  $A$  and  $B$ .

After some manipulation (and using integral tables) one can simply that expression to

$$\begin{aligned}
 U_{AB} &= \frac{\mu}{4\pi} m_A \times \left( \frac{4\pi}{3} R_B^3 M_B \right) \times \frac{1}{r_{AB}^3} \times \{-2 \cos \theta_{mA} \cos \theta_{mB} + \sin \theta_{mA} \sin \theta_{mB} \cos(\phi_{mA} - \phi_{mB})\} \\
 &= \frac{\mu}{4\pi} m_A \times \left( \frac{4\pi}{3} R_B^3 M_B \right) \times \frac{1}{r_{AB}^3} \times \{\cos \theta_{mA} \cos \theta_{mB} + \sin \theta_{mA} \sin \theta_{mB} \cos(\phi_{mA} - \phi_{mB}) - 3 \cos \theta_{mA} \cos \theta_{mB}\}
 \end{aligned}$$

and, finally, recalling that  $\hat{m}_A \cdot \hat{m}_B = \cos \theta_{mA} \cos \theta_{mB} + \sin \theta_{mA} \sin \theta_{mB} \cos (\phi_{mA} - \phi_{mB})$  (eqs. 5),  $\cos \theta_{mA} \cos \theta_{mB} = (\hat{m}_A \cdot \hat{z})(\hat{m}_B \cdot \hat{z}) = (\hat{m}_A \cdot \hat{r}_{BA})(\hat{m}_B \cdot \hat{r}_{BA})$ , the equation above becomes

$$U_{AB} = \frac{\mu}{4\pi} \times \frac{\vec{m}_A \vec{m}_B - 3(\vec{m}_A \cdot \hat{r}_{BA})(\vec{m}_B \cdot \hat{r}_{BA})}{r_{BA}^3}$$

The magnetic interaction between two **perfectly spherical particles** with **completely homogeneous magnetization** is equivalent to that of two point dipoles located at the center of those particles. This expression also ignores particles' **crystal structure**, which means that the value of the interaction should be kept constant for surface-surface distances **smaller than lattice constant**; fortunately, this interaction does not increase that much for small distances and the inclusion of the effect of crystal structure may be superfluous. **Magnetic domains, partial paramagnetism** and **deviation from sphericity** might also get the real interaction away from the dipolar model.

#### IV. THE TENSORIAL APPROACH

Due to the availability of many *computer algebra systems* (CAS) that perform matrix calculations, a tensorial approach is useful to check and generalize the previous results. To do that, we write the second term of eq. 3 in dyadic form  $\vec{r}_{ba}\vec{r}_{ba}$  such that:

$$(d\vec{m}_a \cdot \vec{r}_{ba})(d\vec{m}_b \cdot \vec{r}_{ba}) = d\vec{m}_a \cdot \vec{r}_{ba}\vec{r}_{ba} \cdot d\vec{m}_b,$$

where

$$\vec{r}_{ba}\vec{r}_{ba} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{bmatrix},$$

which is a symmetric second order tensor, so that Eq. 3 can be rewritten as

$$dU_{ab} = \frac{\mu}{4\pi} \left[ \frac{d\vec{m}_a \cdot d\vec{m}_b}{r_{ba}^3} - \frac{3(d\vec{m}_a \cdot \vec{r}_{ba}\vec{r}_{ba} \cdot d\vec{m}_b)}{r_{ba}^5} \right], \quad (13)$$

and finally

$$dU_{ab} = \frac{\mu}{4\pi} \left\{ d\vec{m}_a \cdot \left[ \frac{r_{ba}^2 \mathbb{1} - 3\vec{r}_{ba}\vec{r}_{ba}}{r_{ba}^5} \right] \cdot d\vec{m}_b \right\}, \quad (14)$$

where  $\mathbb{1}$  is identity matrix.

Eq. 14 may be also written as

$$dU_{ab} = d\vec{m}_a \cdot \mathbb{E} \cdot d\vec{m}_b,$$

where  $\mathbb{E}$  could be described as **the energy operator in the basis of magnetic moment** by those who are familiar with Quantum Mechanics calculations. For this very reason, the operator  $\mathbb{E}$  is independent of the magnetic moments. It may be written as

$$\mathbb{E} = \frac{\mu}{4\pi} \left[ \frac{\mathbb{K}}{r_{ba}^5} \right],$$

where  $\mathbb{K} = r_{ba}^2 \mathbb{1} - 3\vec{r}_{ba}\vec{r}_{ba}$ .

The eigenvalues of the tensor  $\mathbb{K}$  are  $\lambda_1 = x^2 + y^2 + z^2$ , with multiplicity **two**, and  $\lambda_2 = -2(x^2 + y^2 + z^2)$ , with multiplicity **one**, such that  $\mathbb{K}$  can be decomposed by means of the so-called “eigen decomposition” as

$$\mathbb{K} = \mathbb{P}\mathbb{D}\mathbb{P}^{-1} \quad (15)$$

where

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 + y^2 + z^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2(x^2 + y^2 + z^2) \end{bmatrix},$$

the matrix  $\mathbb{P}$  is formed with the eigenvectors of  $\mathbb{K}$ :  $\vec{v}_{\lambda_1,1} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta\sin\phi}\hat{y} + \hat{z}$ ,  $\vec{v}_{\lambda_1,2} = \hat{x} - \frac{\cos\phi}{\sin\phi}\hat{y}$  and  $\vec{v}_{\lambda_2} = \frac{\sin\theta\cos\phi}{\cos\theta}\hat{x} + \frac{\sin\theta\sin\phi}{\cos\theta}\hat{y} + \hat{z}$ , that is,

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{\sin\theta\cos\phi}{\cos\theta} \\ -\frac{\cos\theta}{\sin\theta\sin\phi} & -\frac{\cos\phi}{\sin\phi} & \frac{\sin\theta\sin\phi}{\cos\theta} \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

and the inverse matrix  $\mathbb{P}^{-1}$  is

$$\mathbb{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -\sin\theta\cos\theta\cos\phi & -\sin\theta\cos\theta\sin\phi & \sin^2\theta \\ \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta & -\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi & -\sin\theta\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\cos\theta\cos\phi & \sin\theta\cos\theta\sin\phi & \cos^2\theta \end{bmatrix}.$$

Eqs. 15 and 14 implies that

$$\begin{aligned} dU_{ab} &= \frac{\mu}{4\pi} \{ d\vec{m}_a \cdot [\mathbb{P}\mathbb{D}\mathbb{P}^{-1}] \cdot d\vec{m}_b \} \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \{ [d\vec{m}_a \cdot \mathbb{P}] [\mathbb{D}] [\mathbb{P}^{-1} \cdot d\vec{m}_b] \}, \end{aligned}$$

where  $d\vec{m}_a \cdot \mathbb{P}$  is written in matrix form as a row vector,

$$d\vec{m}_a \cdot \mathbb{P} = [a \quad b \quad c],$$

where

$$\begin{aligned} a &= -\frac{\cos\theta}{\sin\theta\sin\phi} dm_{ay} + dm_{az}, \\ b &= dm_{ax} - \frac{\cos\phi}{\sin\phi} dm_{ay}, \\ c &= \frac{\sin\theta\cos\phi}{\cos\theta} dm_{ax} + \frac{\sin\theta\sin\phi}{\cos\theta} dm_{ay} + dm_{az}, \end{aligned}$$

and  $\mathbb{P}^{-1} \cdot d\vec{m}_b$  as a column vector,

$$\mathbb{P}^{-1} \cdot d\vec{m}_b = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}.$$

where

$$\begin{aligned} d &= -\sin\theta\cos\theta\cos\phi\,dm_{bx} - \sin\theta\cos\theta\sin\phi\,dm_{by} + \sin^2\theta\,dm_{bz}, \\ e &= (\sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta)\,dm_{bx} - \sin^2\theta\sin\phi\cos\phi\,dm_{by} - \sin\theta\cos\theta\cos\phi\,dm_{bz}, \\ f &= \sin\theta\cos\theta\cos\phi\,dm_{bx} + \sin\theta\cos\theta\sin\phi\,dm_{by} + \cos^2\theta\,dm_{bz} \end{aligned}$$

Since  $\mathbb{D}$  is a diagonal matrix, the components of  $d\vec{m}_a \cdot \mathbb{P}$  and  $\mathbb{P}^{-1} \cdot d\vec{m}_b$  will be multiplied separately along each axis, without “cross-multiplication”. After some algebraic manipulation,

$$\begin{aligned} & [d\vec{m}_a \cdot \mathbb{P}][\mathbb{D}][\mathbb{P}^{-1} \cdot d\vec{m}_b] \\ &= r^2 \left[ (1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta)\,dm_{ax}\,dm_{bx} + (\sin\phi\cos\phi(\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta))\,dm_{ax}\,dm_{by} - 3\sin\theta\cos\theta\cos\phi\,dm_{ax}\,dm_{bz} \right. \\ & - 3\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi\,dm_{ay}\,dm_{bx} + (1 - 3\sin^2\theta\sin^2\theta)\,dm_{ay}\,dm_{by} - 2\sin\theta\cos\theta\sin\phi\,dm_{ay}\,dm_{bz} \\ & \left. - 3\sin\theta\cos\theta\cos\phi\,dm_{az}\,dm_{bx} - 3\sin\theta\cos\theta\sin\phi\,dm_{az}\,dm_{by} + (1 - 3\cos^2\theta)\,dm_{az}\,dm_{bz} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

The equation above is quite **general**. It is valid for all sorts of forms. However,  $r$ ,  $\theta$  and  $\phi$  are spherical coordinates that position  $d\vec{m}_b$  in relation to  $d\vec{m}_a$ , such that, for a non spherical volume, the integration limits of those variable are interdependent. However, for instance, for ellipsoidal volumes, a reparametrization of the coordinate system may give similar results as the ones obtained by us in the present paper.

## V. FORM ANALYSIS

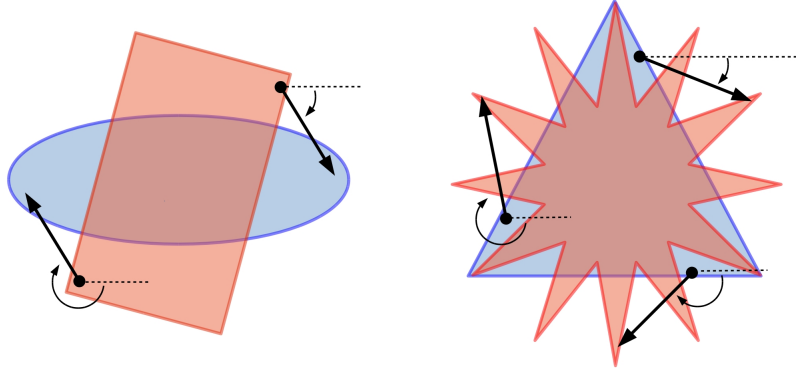
In Eq. 16,  $r$ ,  $\theta$  and  $\phi$  describe the spherical coordinates of the positions of all volume elements of body  $B$  in relation to all volume elements of body  $A$ . That expression is supposed to be integrated over the volumes of  $A$  and  $B$ , so one would normally have to change its dependence from  $\{r, \theta, \phi\}$  to  $\{r_a, \theta_a, \phi_a\}, \{r_b, \theta_b, \phi_b\}$ . However, even before performing that transformation, it is possible to make some progress in the analysis of bodies with some symmetry properties.

### Bodies with rotational symmetry along z:

Let us restrict ourselves to the interaction between bodies whose volumes share a symmetry axis in  $z$ . That integration will cancel out all those factors whose dependence in  $\phi$  are  $\sin\phi$ ,  $\cos\phi$  or  $\sin\phi\cos\phi$ , provided that, for each  $\{r, \theta\}$  pair,  $\phi$  assume values that are regularly distributed along the cycle  $\{0, 2\pi\}$ . That condition is fulfilled if the bodies  $A$  and  $B$  share an axis of rotational symmetry along the  $z$  axis, as illustrated in Fig. 2, because, in that situation, the integration over  $\phi$  is cancelled out for any pair  $r, \theta$ .

For systems with that kind of symmetry,

$$\begin{aligned} & [d\vec{m}_a \cdot \mathbb{P}][\mathbb{D}][\mathbb{P}^{-1} \cdot d\vec{m}_b]^{(\text{not canceled by } \int d\phi)} = (x^2 + y^2 + z^2) \\ & \times [dm_{ax}dm_{bx}(1 - 3\sin^2\theta\cos^2\phi) + dm_{ay}dm_{by}(1 - 3\sin^2\theta\sin^2\phi) + dm_{az}dm_{bz}(1 - 3\cos^2\phi)] \\ & = r^2 \left\{ d\vec{m}_I d\vec{m}_J - 3 \left[ (\sin^2\theta\cos^2\phi)dm_{ax}dm_{bx} + (\sin^2\theta\sin^2\phi)dm_{ay}dm_{by} + (\cos^2\theta)dm_{az}dm_{bz} \right] \right\} \end{aligned}$$



**Figura 2:** Transversal-to-z sections of two pairs of bodies which share rotational symmetry axis along z. For each relative position vector, it is possible to find other vectors of same magnitude and orientation changed by displacements of  $\pi/n$  in the relative azimuthal angle, with  $n = 2$  and  $n = 3$  in the examples.

such that Eq. 14 becomes, remembering also that  $r \equiv r_{ba}$ ,  $\theta \equiv \theta_{ba}$  and  $\phi \equiv \phi_{ba}$ ,

$$dU_{ab} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{r_{ba}^3} \left\{ d\vec{m}_a \cdot d\vec{m}_b - 3 \left[ (\sin^2 \theta_{ba} \cos^2 \phi_{ba}) dm_{ax} dm_{bx} \right. \right. \\ \left. \left. + (\sin^2 \theta_{ba} \sin^2 \phi_{ba}) dm_{ay} dm_{by} + (\cos^2 \theta_{ba}) dm_{az} dm_{bz} \right] \right\}. \quad (17)$$

Now, considering constant magnetization inside each body, we can put

$$d\vec{m}_a = \vec{M}_a dV_a \quad \text{and} \quad d\vec{m}_b = \vec{M}_b dV_b$$

in Eq. 17, resulting in

$$dU_{ab} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{r_{ba}^3} \left\{ \vec{M}_a \cdot \vec{M}_b - 3 \left[ (\sin^2 \theta_{ba} \cos^2 \phi_{ba}) M_{ax} M_{bx} \right. \right. \\ \left. \left. + (\sin^2 \theta_{ba} \sin^2 \phi_{ba}) M_{ay} M_{by} + (\cos^2 \theta_{ba}) M_{az} M_{bz} \right] \right\} dV_a dV_b. \quad (18)$$

The only assumption we have made about volumes  $V_a$  and  $V_b$  so far is that both of them have a rotational symmetry axis along the z-axis, where the center-to-center distance between solids A and B extends along. So, in such a configuration, Eq. 18 is valid for ferromagnetic ellipsoids, cubes, cylinders, tubes (even with varying cross-section), etc.

### A point dipole (or a sphere) and a body with rotational symmetry:

Let us replace the body A with a point dipole  $m_A$ , so that Eq. 18 becomes

$$dU_{Ab} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{r_{bA}^3} \left\{ \vec{m}_A \cdot \vec{M}_b - 3 \left[ (\sin^2 \theta_{bA} \cos^2 \phi_{bA}) m_{Ax} M_{bx} \right. \right. \\ \left. \left. + (\sin^2 \theta_{bA} \sin^2 \phi_{bA}) m_{Ay} M_{by} + (\cos^2 \theta_{bA}) m_{Az} M_{bz} \right] \right\} dV_b. \quad (19)$$

As already shown, the magnetic field of a sphere with fixed volume magnetization is dipolar as experienced from outside its volume. Thus, Eq. 19 is also applicable to the interaction between a sphere and a ferromagnetic body with a rotational symmetry axis along the distance between their centers.

### A point dipole (or a sphere) and a body with circular transversal section:

Now, consider that  $B$  is a body like a tube, a cylinder or an ellipsoid, i.e., with circular cross sections (either disks or rings). For such a system, it is convenient to write the volume element in spherical or cylindrical coordinates, but we shall be careful because the conventional volume element forms (e.g.  $r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$ ) are usually expressed in relation to the center of the solid being integrated. Let us again distinguish variables expressed in relation to the center of solid  $B$  from the ones expressed in relation to the center of solid  $A$ :

$$dU_{Ab} = \frac{\mu}{4\pi} \int \int \int \frac{1}{r_{bA}^3} \left\{ \vec{m}_A \cdot \vec{M}_J - 3 [(\sin^2 \theta_{bA} \cos^2 \phi_{bA}) m_{Ax} M_{bx} + (\sin^2 \theta_{bA} \sin^2 \phi_{bA}) m_{Ay} M_{by} + (\cos^2 \theta_{bA}) m_{Az} M_{bz}] \right\} r_{bB}^2 \sin \theta_{bB} d\phi_{bB} dr_{bB} d\theta_{bB}.$$

As the angles  $\phi$  refer to the angular position of projections in the  $xy$ -plane, we can define that  $\phi_{aA} = \phi_{bB}$  without loss of generality (that is not true for  $\theta$ ). As  $A$  is a point dipole at the origin (i.e.,  $\vec{r}_A = (0,0,0)$ ), and because of the circular transversal sections of  $B$ , the integrations in  $\phi$  are readily done from 0 to  $2\pi$ :

$$dU_{Ab} = \frac{\mu}{4} \int_0^{R_B} \int_0^\pi \frac{1}{r_{bA}^3} \left\{ 2(\vec{m}_A \cdot \vec{M}_J) - 3 [\sin^2 \theta_{bA} m_{Ax} M_{bx} + \sin^2 \theta_{bA} m_{Ay} M_{by} + 2 \cos^2 \theta_{bA} m_{Az} M_{bz}] \right\} r_{bB}^2 \sin \theta_{bB} dr_{bB} d\theta_{bB}.$$

To follow this calculation, one must now define the integration limits, but the upper integration limit of  $r_{bB}$  depends on  $\theta_{bB}$ , with specific expressions for each solid. For an ellipsoid, it might be convenient to stand with spherical coordinates, but for cylindrical tubes, one may choose to shift to cylindrical coordinates.

### A point dipole and a sphere (or two spheres)

Integrating the interaction energy between two spheres is equivalent to considering one of them a point dipole and integrating its field over the volume of the other. Let us consider sphere  $A$  as a point dipole and integrate its field over the volume of sphere  $B$ <sup>1</sup>. Eq. 19 to this system.

When using spherical coordinates, spheres are special because the integration limits of the coordinates are independent of each other:

$$dU_{Ab} = \frac{\mu}{4\pi} \int_0^{R_B} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{r_{bA}^3} \left\{ \vec{m}_A \cdot \vec{M}_J - 3 [(\sin^2 \theta_{bA} \cos^2 \phi_{bA}) m_{Ax} M_{bx} + (\sin^2 \theta_{bA} \sin^2 \phi_{bA}) m_{Ay} M_{by} + (\cos^2 \theta_{bA}) m_{Az} M_{bz}] \right\} r_{bB}^2 \sin \theta_{bB} d\phi_{bB} d\theta_{bB} dr_{bB}.$$

<sup>1</sup>Alternatively, we could do the opposite: consider sphere  $B$  as a point dipole and integrate its field over the volume of sphere  $A$ . Newton's Third Law guarantees that we would have the same result.

Recalling eq. 5,

$$dU_{Ab} = \frac{\mu}{4\pi} \int_0^{R_B} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{(r_{bB}^2 + r_{BA}^2 + 2r_{bB}r_{BA} \cos \theta_{bB})^{3/2}} \left\{ \vec{m}_A \cdot \vec{M}_J - 3 \left[ (\sin^2 \theta_{bA} \cos^2 \phi_{bA}) m_{Ax} M_{bx} + (\sin^2 \theta_{bA} \sin^2 \phi_{bA}) m_{Ay} M_{by} + (\cos^2 \theta_{bA}) m_{Az} M_{bz} \right] \right\} r_{bB}^2 \sin \theta_{bB} d\phi_{bB} d\theta_{bB} dr_{bB}.$$

Using  $\sin \theta_{bA} = r_{bB} \sin \theta_{bB} / r_{bA}$  (from eq. 8) and  $\phi_{bA} = \phi_{bB}$ , and then using eq. 7 to remedy the last  $J_i$  dependence,

$$dU_{Ab} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{[\vec{m}_A \cdot \vec{M}_b] r_{bB}^2 \sin \theta_{bB}}{(r_{bB}^2 + r_{BA}^2 + 2r_{bB}r_{BA} \cos \theta_{bB})^{3/2}} dV - \frac{3\mu}{4\pi} \int \frac{[m_{Ax} M_{bx}] (r_{bB}^4 \sin^3 \theta_{bB} \cos^2 \phi_{bB})}{(r_{bB}^2 + r_{BA}^2 + 2r_{bB}r_{BA} \cos \theta_{bB})^{5/2}} dV - \frac{3\mu}{4\pi} \int \frac{[m_{Ay} M_{by}] (r_{bB}^4 \sin^3 \theta_{bB} \sin^2 \phi_{bB})}{(r_{bB}^2 + r_{BA}^2 + 2r_{bB}r_{BA} \cos \theta_{bB})^{5/2}} dV - \frac{3\mu}{4\pi} \int [m_{Az} M_{bz}] r_{bA}^2 \frac{(r_{BA}^2 \sin \theta_{bB} + 2r_{BA}r_{bB} \sin \theta_{bB} \cos \theta_{bB} + r_{bB}^2 \sin \theta_{bB} \cos^2 \theta_{bB})}{(r_{bB}^2 + r_{BA}^2 + 2r_{bB}r_{BA} \cos \theta_{bB})^{5/2}} dV$$

where  $\int \equiv \int_0^{R_B} \int_0^\pi \int_0^{2\pi}$  and  $dV \equiv d\phi_{bB} d\theta_{bB} dr_{bB}$ .

Considering that the direction of the magnetization is fixed inside each sphere, and performing the integrations in  $\phi_{bB}$  (which are very simple), it is trivial to arrive at

$$dU_{ij} = \frac{\mu}{4} [\vec{m}_A \cdot \vec{M}_B] \int_0^{R_B} \int_0^\pi \frac{r_{bB}^2 \sin \theta_{bB}}{(r_{bB}^2 + r_{BA}^2 + 2r_{bB}r_{BA} \cos \theta_{bB})^{3/2}} d\theta_{bB} dr_{bB} - \frac{3\mu}{4} [m_{Ax} M_{Bx} + m_{Ay} M_{By}] \int_0^{R_B} \int_0^\pi \frac{(r_{bB}^4 \sin^3 \theta_{bB})}{(r_{bB}^2 + r_{BA}^2 + 2r_{bB}r_{BA} \cos \theta_{bB})^{5/2}} d\theta_{bB} dr_{bB} - \frac{3\mu}{2} [m_{iz} M_{jz}] \int_0^{R_B} \int_0^\pi \frac{r_{bA}^2}{(r_{bB}^2 + r_{BA}^2 + 2r_{bB}r_{BA} \cos \theta_{bB})^{5/2}} (r_{BA}^2 \sin \theta_{bB} + 2r_{BA}r_{bB} \sin \theta_{bB} \cos \theta_{bB} + r_{bB}^2 \sin \theta_{bB} \cos^2 \theta_{bB}) d\theta_{bB} dr_{bB}.$$

The equation above turns to be the same as eq. 12 through the variable change of eq. 11, such that the deduction can continue there, proving again that the magnetic interaction between these two spheres is dipolar.

## VI. CONCLUSION

The calculation of magnetic interaction between solids might be simplified by taking symmetry properties into account from the beginning. If tensor calculus is used, the magnetostatic interaction can be written by means of an operator that depends only on space applied to magnetic moment vectors. That is

particularly useful to analyse interacting bodies with shared symmetry axes. We showed that a relatively simple magnetic interaction between infinitesimal elements, with only four terms, can be applied to the interaction between solids that share an axis of rotational symmetry along the distance between their centers. We showed that two ferromagnetic spheres, arbitrarily positioned and oriented, interact as two point dipoles, provided that the magnetization inside the volume of each one of them is constant and continuous. The explicit derivation was made in progressive restriction of the properties of the volume to which it can be applied, in order to facilitate the application to bodies of different forms. We aim to extend that calculation to ellipsoids and spheres with radially-varying magnetization, useful models in the research involving magnetic nanoparticles.

## REFERÊNCIAS

- [1] AHARONI, A. *IEEE Transactions on magnetics*, v. MAG-23, n. 3, 1853 (1987).
- [2] FITZPATRICK, R. *Classical Electromagnetism (lecture notes)*, <http://farside.ph.utexas.edu/teaching/jk1/lectures/node61.html> [On-line]. 2015. Disponibilidade: junho de 2017.
- [3] BATLLE, X., LABARTA, A. *Journal of Physics D: Applied Physics* **35**, n. 6, R15 (2002).
- [4] PAREKH, K., UPADYAY, R. V., MEHTA, R. V. *Hyperfine Interactions* **160**, n. 1, 211-217 (2005).
- [5] KENYON, K. E. *Physics Essays* **18**, n. 2, 174 (2005).
- [6] GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Electrodynamics*, New Jersey: Prentice Hall - Upper Saddle River (1999).

# A “Prova experimental das Correntes Moleculares de Ampère” de A. Einstein e W. J. de Haas.

(The “Experimental proof of the existence of Ampère’s molecular currents”, of A. Einstein and W. J. de Haas.)

JOÃO PAULO MARTINS DE CASTRO CHAIB\*

CARLOS HENRIQUE MORAES SANTOS†

Curso de Física, Universidade Católica de Brasília, Taguatinga, DF, Brasil.

## Resumo

*Apresentamos uma contextualização crítica e a tradução do inglês para o português do artigo “Prova experimental da existência das correntes moleculares de Ampère” escrito por A. Einstein e W. de Haas. Este trabalho experimental desenvolvido pelo fundador da relatividade geral teve um papel importante na história da ciência, sendo o estopim para a construção do conceito de spin eletrônico. Por detrás deste recorte histórico pode-se ver um exemplo da relação epistemológica entre experimento, teoria e comunidade científica.*

Palavras-chave: Corrente Molecular, A.-M. Ampère, Efeito Einstein – de Haas, Spin eletrônico, História da Ciência.

## Abstract

*We present a critical contextualization and the translation from English to Portuguese of the article “Experimental proof of the existence of Ampère’s molecular currents”, written by A. Einstein and W. de Haas. This experimental work developed by the creator of the general relativity had a important role in the history of science, once that their result was the trigger to the cosntruction of the concept of the electronic spin. Around this historical episode one can see an example of the epistemological relationship between experiment, theory and scientific community.*

Keywords: Molecular currents; A.-M. Ampère; Einstein-de Haas effect, electronic spin, History of Science.

## 1 Introdução

Em 2015 completou-se 100 anos da publicação do artigo “*Experimenteller nachweis der Ampèreschen molekularströme*” [1].<sup>1</sup> Neste experimento, Albert Einstein (1879 – 1955) e Wander Johannes de Haas

---

\*jopachaib@gmail.com

†carloshmsantos@gmail.com

<sup>1</sup>Em português: “Prova experimental das correntes moleculares de Ampère”.

(1878 – 1970) desenvolveram um método experimental para observar a razão entre o momento angular e o momento de dipolo magnético de uma barra de ferro imantada, e assim calcular a mesma razão das prováveis correntes elétricas elementares em seu interior — daí o nome “correntes moleculares” — previstas por André-Marie Ampère (1775 – 1836) [2, pp. 111–117].

Além deste artigo, ambos desenvolveram em parceria outros trabalhos sobre o tema: o homônimo “*Experimenteller nachweis der Ampèreschen molekularströme*” [3]; “*Proefondervindelijk bewijs voor het bestaan der moleculaire stromen van Ampère*” [4]; e “*Ein einfaches experiment zum nachweis der Ampèreschen molekularströme*” [5].<sup>2</sup>

A dupla recebeu o Prêmio Baumgärtner da Academia Vienense de Ciências, em 1917, pelos trabalhos realizados sobre este tema, e o fenômeno desenvolvido em seus experimentos ficou conhecido como *efeito Einstein – de Haas* [6].

Apresentamos uma contextualização crítica do experimento e a tradução do artigo [7], o qual consiste em uma tradução de [1] para o Inglês. Como vários artigos de Einstein nas demais áreas, o trabalho que tratamos aqui foi de grande impacto na história da física, sendo o estopim para revolucionar as teorias sobre a estrutura magnética da matéria. Soma-se também ao valor deste artigo, o fato de que é o principal trabalho experimental de Einstein onde este é o ator principal.

## 2 Alguns dados biográficos

Dentro desta seção abordamos o pouco destacado perfil de Einstein como físico experimentador. Iguamente apresentamos W. de Haas que é pouco conhecido, apesar de ter contribuído bastante com o desenvolvimento da física experimental.

### 2.1 Einstein Experimentador

Albert Einstein nasceu em Ulm, Alemanha, em 14 de março de 1879. Em 1896, aos 17 anos, ele ingressa na Politécnica de Zurique. Gradua-se em 1900 e no ano seguinte publica seu primeiro artigo, “Conclusão extraída dos fenômenos de capilaridade” [8]. No ano de 1905, seu *annus mirabilis*, ele submeteu sua tese de doutorado, “Uma nova determinação de dimensões moleculares” [9]. Neste mesmo ano, publica seus 3 artigos mais importantes: “Sobre um ponto de vista heurístico relativo à produção e transformação da luz” [10], pelo qual recebeu o Nobel de Física de 1921 ao modelar o *efeito fotoelétrico*; “Sobre o movimento de pequenas partículas suspensas em líquidos estacionários exigido pela teoria cinética molecular do calor” [11], que trata do movimento browniano; e “Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento” [12], que apresenta a gênese da Teoria da Relatividade Especial.

Einstein é normalmente destacado pelo monumental trabalho desenvolvido na Física Teórica, mas vale apenas destacar aqui o seu grande interesse em questões experimentais da física.

---

<sup>2</sup>Respectivamente em português: “Prova experimental das correntes moleculares de Ampère”; “Prova experimental da existência das correntes moleculares de Ampère”; “Prova experimental da existência das correntes moleculares de Ampère” e “Um experimento simples para demonstrar as correntes moleculares de Ampère”.

Já na sua tese de doutoramento, propõe uma maneira de se obter o número de Avogadro com líquidos. Em 1907, prevê uma flutuação de potencial elétrico dentro do capacitor no artigo “Sobre o limite de validade da Lei de Equilíbrio Termodinâmico e sobre a possibilidade de uma nova determinação dos quanta elementares” [13]. Em seguida, realizou o procedimento experimental para avaliar sua previsão. Para tanto, encomendou com Conrad Habicht (1876 – 1958) e Paul Habicht (1884 – 1948) um dispositivo que pudesse gerar e detectar frações de potencial elétrico bem menores do que se detectava usualmente [14]. O trabalho experimental desenvolvido em conjunto com W. J. de Haas se deu no mesmo ano em que Einstein completou seu trabalho fundamental na Relatividade Geral (1915).

Os dois se conheceram pessoalmente por conta da proximidade que tinham com Hendrik Antoon Lorentz (1853 – 1928). Enquanto que de Haas era seu genro, Einstein era seu amigo íntimo. Este último escreve em janeiro de 1915 a Lorentz:

[...] Devo dizer-te que, no curso de nossa colaboração, eu vim a estimar e respeitar extremamente seu genro. Para a nossa grande satisfação, o experimento sobre magnetismo tem se encaminhado de forma positiva. Agora, de Haas concebeu um procedimento investigativo ainda melhor, no qual o uso de ressonância pode até ser dispensado. Com isso, foi encontrado o motivo pelo qual o eixo magnético e o eixo rotacional da Terra quase coincidirem. [15, p. 59]

Com relação à atividade experimental, Einstein demonstra sua empolgação ao escrever em fevereiro de 1915 à Michele Angelo Besso (1873 – 1955):

O experimento se finalizará em breve. Com isso a existência de energia do ponto zero também estará provada em um golpe só. Um experimento maravilhoso; uma pena você não poder ver isso. E quão traiçoeira é a natureza quando você quer lidar com isso experimentalmente! Experimentação está se tornando uma paixão para mim, mesmo na velhice. [16, pp. 68–69]

Igualmente, em abril de 1915, relata a Heinrich Zangger (1874 – 1957):

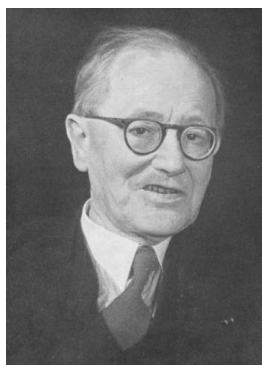
Relativo a ciência, este semestre eu trabalhei em um maravilhoso problema experimental juntamente com o genro de Lorentz no Instituto *Reich*. Nós fornecemos firme prova experimental das correntes moleculares de Ampère [17, p. 87].

Outro estudo experimental feito por Einstein, em coautoria com Hans Günter Müsser (1876 – 1957), trata de um método para determinar as dimensões de canais em filtros. O artigo descreve a ideia de um instrumento para medir a maior dimensão de partículas que conseguem atravessar um dado filtro e também um experimento teste [18].

Einstein também registrou algumas patentes, a maioria datadas entre o final dos anos 20 e início dos anos 30, quando colaborou com o inventor e físico Leo Szilard (1898 – 1964) [14].

Em 18 de abril de 1955, aos 76 anos, Einstein faleceu deixando seu legado em várias áreas da física.

## 2.2 W. J. de Haas



**Figura 1:** *Wander Johannes de Haas [19].*

Wander Johannes de Haas nasceu em 2 de março de 1878 em Lisse, na Holanda, e formou-se em Física na Universidade de Leiden. Trabalhou com H. K. Onnes como seu assistente de laboratório entre 1905 e 1911. Em seguida, foi assistente de Henri Eduard Johan Godfried du Bois (1863 – 1918), em Berlim no Bosscha Laboratorium, entre os anos 1911 e 1913. Concluiu seu doutoramento sob a orientação de Onnes em 1912 com a dissertação “Medidas da compressibilidade do Hidrogênio, em particular do vapor de Hidrogênio perto e abaixo do ponto de ebulição” [6].

Depois de ter trabalhado na Alemanha, no *Physikalisch-Technische Reichsanstalt*, foi assistente de Lorentz e diretor da divisão de física do Instituto Teyler de Haarlem. Em 1917, mesmo ano em que ganhou o Prêmio Baumgärtner da Academia Vienense de Ciências, foi indicado para a cadeira de Física Aplicada do Colégio Técnico de Delft. Em 1922, ele aceitou a cadeira de Física da Universidade de Groningen, e foi eleito membro da Real Academia de Artes e Ciências. Em 1923, se tornou membro da Sociedade Holandesa de Ciências. Após a aposentadoria de Onnes, de Haas o sucedeu na Universidade de Leiden entre 1924 e 1948. Também foi diretor do Laboratório de Física Experimental Kamerlingh Onnes, o qual foi um dos primeiros laboratórios no mundo onde se trabalhou sistematicamente com experimentos a baixas temperaturas [20].

Somando-se à sua intensa carga laboral,

[...] sua saúde nunca foi muito boa, mas com a ajuda de sua esposa (uma física teórica) [Geertruida Luberta de Haas-Lorentz (1885 – 1973)], ele foi capaz de manter seus contatos científicos internacionais e executar as funções de direção de seu laboratório. [20, Entre colchetes é nosso.]

Ficou conhecido como especialista em magnetismo. Ele liderou a produção de temperaturas extremamente baixas pela desmagnetização adiabática de materiais magnetizados pré-resfriados. Trabalhou também nas pesquisas que convergiram no fenômeno conhecido hoje por *efeito de Haas – van Alphen*. Este efeito trata do comportamento anômalo da suscetibilidade diamagnética de um metal resfriado, quando este é submetido a uma mudança contínua de uma força magnética externa. Desenvolveu também pesquisas magneto-ópticas em cristais, publicadas, principalmente, com Jean Becquerel (1878

– 1953) [20]. Outro fenômeno que leva seu nome é o *efeito Shubnikov – de Haas*, que, neste caso, trata da mudança na condutividade de metais resfriados quando submetidos a uma mudança contínua da ação magnética externa.

Em 1935, de Haas e sua equipe alcançaram uma temperatura de 0,005 K. Segundo Helden,

De Haas foi um dos mais importantes físicos de baixas temperaturas da primeira metade do século XX. Ele participou dos Congressos Solvay de 1921 e 1930, foi honrado pela *Royal Society of London* com a Medalha Rumford, foi um membro honorário da *Société française de physique* e lecionou as *Scott Lectures* em Cambridge em 1937. Em Leiden, ele atuou como presidente da sociedade que regeu a escola de fabricantes de instrumento de 1926 a 1951. [6]

W. J. de Haas se aposentou em 1948 e faleceu em 26 de abril de 1960, aos 82 anos, em Bilthoven, na Holanda.



**Figura 2:** W. de Haas na foto oficial da 3ª Conferência Solvay, no Instituto Internacional de Física Solvay, em Bruxelas, de 1–6 de abril de 1921. Estão na foto, de cima para baixo e da esquerda para a direita, primeira fileira: William Lawrence Bragg, Edmond van Aubel, **Wander Johannes de Haas**, Édouard Herzen, Charles Glover Barkla, Paul Ehrenfest, Manne Siegbahn, Jules-Émile Verschaffelt, Léon Brillouin. Segunda fileira: Martin Knudsen, Jean-Baptiste Perrin, Paul Langevin, Owen Willans Richardson, Joseph Larmor, Heike Kamerlingh Onnes, Pieter Zeeman, Maurice de Broglie. Terceira fileira: Albert Abraham Michelson, Pierre Weiss, Marcel Brillouin, Ernest Solvay, Hendrik Antoon Lorentz, Ernest Rutherford, Robert Andrews Millikan, Marie Curie [21].

### 2.2.1 Algumas publicações de W. J. de Haas

Segue uma pequena lista de publicações de W. de Haas além das já citadas: “Isotérmicas de substâncias diatômicas e de suas misturas binárias. XII. A compressibilidade de vapor de hidrogênio no ponto de

ebulição e abaixo dele” [22]; “O efeito de temperatura e magnetização transversa na resistência de corrente contínua de antimônio cristalizado” [23]; “Outros experimentos sobre o momento angular existente em um ímã” [24]; “Um experimento sobre as correntes moleculares de Maxwell e Ampère” [25]; “Sobre o fenômeno de difração causado por um grande número de fendas irregularmente distribuídas ou partículas opacas” [26]; “Sobre a perturbação magnética da supercondutividade com mercúrio I” [27]; “Novos supercondutores” [28]; “Verificação experimental da teoria da polarização rotatória paramagnética nos cristais de xenotímio” [29]; “Os ensaios de redes monocristalinas” [30]; e “Aumento da resistência magnética em monocristais de bismuto a temperaturas extremamente baixas” [31].

### 3 Panorama prévio ao experimento

#### 3.1 A influência de Maxwell na concepção das correntes elétricas

Embora isso não fosse uma condição necessária para deduzir a expressão para a sua força eletrodinâmica, André-Marie Ampère, a partir de outros fenômenos, inferiu que os efeitos da interação entre correntes elétricas na sua forma mais elementar daria-se por conta do *movimento de partículas eletricamente carregadas* [2, pp. 465–468]. Ele foi o primeiro cientista a defender de maneira enfática que a corrente elétrica se tratava de um *fluxo de partículas* e que, inclusive, possuíam inércia [32, p. 64].

No entanto, vários cientistas, tal como Michael Faraday (1791 – 1867) e James Clerk Maxwell (1831 – 1879), não compartilhavam da visão de Ampère.

Maxwell acreditava que o elemento de corrente elétrica consistia na propagação de uma *corrente de energia*, e não em um fluxo de matéria. A influência desta concepção foi tão grande que até hoje fala-se de uma “corrente de energia elétrica” nos fios, e não de uma “corrente de partículas elétricas”. Nos parágrafos 568. até 573. do volume 2 de seu livro “Um tratado sobre eletricidade e magnetismo”, Maxwell apontou as consequências físicas para o caso de “[...] se, ao invés de correntes [de energia] elétricas, nós tivermos um fluido incompressível correndo dentro dos fios flexíveis” [33, p. 199]. E, para validar seu ponto de vista, desenvolveu experimentos a fim de tirar a prova das duas hipóteses antagônicas: A corrente elétrica consiste ou não consiste no fluxo de partículas com massa inercial?

No *caput* da página onde se encontra o parágrafo 574 do mesmo livro, o cientista do Reino Unido realiza a seguinte pergunta:

*Uma corrente elétrica possui momento real?*

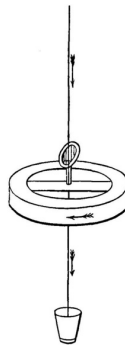
Maxwell realiza então três experimentos para defender que a corrente elétrica **não se trataria** de uma corrente de partículas no interior dos objetos.

O primeiro experimento está ilustrado na Figura 3. A fonte de corrente está ligada a um fio vertical que por sua vez está preso a um anteparo em sua parte superior. A parte inferior deste fio suspende uma bobina circular feita de “grande número de espiras” [33, p.201], com seu plano disposto horizontalmente. Para fechar o circuito, um outro fio vertical desce a partir da bobina verticalmente, e mergulha em um copo de mercúrio. Este, por sua vez, está ligado à fonte. Um pequeno espelho vertical é disposto no centro da bobina para detectar qualquer movimento do azimute. Segundo Maxwell, esta configuração,

após compensados os efeitos magnéticos terrestres, deu liberdade para a bobina girar ao redor do eixo vertical que passa pelo seu centro.

Desta maneira,

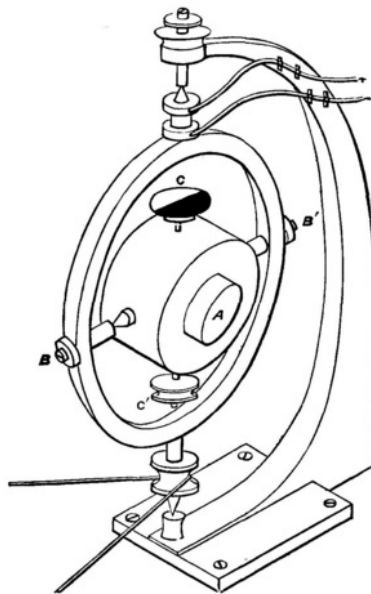
Agora, deixa-se a corrente passar através da bobina na direção N.L.S.O. [Norte Leste Sul Oeste]. Se eletricidade for um fluido como a água, fluindo ao longo do fio, então, no momento em que se começar a corrente, e contanto que sua velocidade aumente, [...], a bobina deverá girar inicialmente na direção oposta, O.S.L.N, e isso deve ser detectado pelo espelho. Interrompendo-se a corrente haverá um outro movimento do espelho, agora na mesma direção da corrente. [33, pp. 201–202].



**Figura 3:** *Esquema do primeiro experimento [33, p. 201].*

Maxwell afirma não observar a variação do momento angular da bobina, que compensaria a mesma variação do suposto fluido elétrico em seu interior. Ou seja, não se observou o movimento esperado caso a corrente elétrica fosse feita do fluxo de partículas (como elétrons) em uma dada direção.

Eliminando uma resistência por atrito ou elasticidade do fio, Maxwell destaca que a ausência de movimento na bobina também poderia se dar caso a corrente de partículas elétricas fosse constituída de duas correntes, uma de eletricidade positiva e outra negativa, fluindo em sentidos opostos — situação a qual chamou de Hipótese de Fechner. Acrescentamos ainda que o momento se conservaria mesmo se as velocidades dos dois fluidos fossem diferentes, basta que a massa efetiva das partículas positivas fosse diferente da massa efetiva das partículas negativas. Porém, Maxwell rejeita esta hipótese afirmando não haver suporte experimental para tal.



**Figura 4:** Esquema do segundo experimento [33, p. 203].

O segundo experimento investiga os efeitos inerciais de uma corrente constante, usando uma analogia com o giroscópio, Figura 4. O aparato, na sua essência, consiste em um giroscópio dentro de outro. A parte móvel externa tem formato circular e pode girar ao redor do eixo vertical. Na sua extremidade inferior está uma polia que pode ser posta a girar por meio de uma corda. No seu interior encontra-se uma bobina eletromagnética com o núcleo ferroso (A), cujo conjunto pode girar livremente ao redor do eixo horizontal  $BB'$ . A bateria tem seus polos ligados na extremidade superior do aparato. Partindo do fio mais abaixo, o circuito segue por  $B'$ , atravessa a bobina, segue por  $B$  e finalmente se fecha no fio superior.

Uma vez que o conjunto é posto para girar ao redor do eixo vertical, se o eletroímã se comportar com um giroscópio, a estrutura interna ao qual ele está preso se moverá levemente ao redor de  $BB'$ , variando o ângulo que o eixo  $CC'$  faz com a vertical. Barnett observa que Maxwell,

[...] parece ter sido o primeiro a conceber a ideia de que um ímã deveria se comportar como um giroscópio se suas correntes amperianas fossem realmente materiais [...]. [34, p. 459]

Dado o insucesso da medida, Maxwell concluiu que,

Se, entretanto, um ímã contém matéria [partículas] em rotação rápida, o momento angular desta rotação deve ser pequeníssimo comparados a qualquer quantidade que podemos medir, e assim não temos qualquer evidência dos termos  $T_{me}$  [energia cinética da corrente] derivados a partir de sua ação mecânica. [33, p. 205]

Para o terceiro experimento, Maxwell afirmou que se a bobina usada no primeiro experimento fosse posta a girar de repente em torno do eixo vertical, ocasionaria uma força eletromotriz proporcional à aceleração angular. Esta mesma força eletromotriz se anulava quando o movimento ficasse uniforme e se reverteria quando o movimento fosse retardado. O que não foi observado na época.

Assim, por conta dos três resultados negativos obtidos, **Maxwell “provou experimentalmente” que as correntes elétricas não eram constituídas de partículas com inércia!** Maxwell então afirma que apesar de haver vantagem didática nas analogias entre corrente elétrica e uma corrente de fluido material, deve-se tomar cuidado com suposições não garantidas experimentalmente dado que não há evidência que mostrasse a corrente elétrica como uma corrente real de uma substância material.

Da mesma forma, concluiu que os fenômenos da corrente elétrica estariam ligados à transferência do que chamou de “energia eletrocinética” e “momento eletrocinético” [33, pp. 183, 200, 207].

No entanto, embora não se tenha notícia de uma tentativa de reprodução do primeiro experimento citado de Maxwell, vale notar que W. J. de Haas e Geertruida L. de Haas-Lorentz desenvolveram um modelo para o segundo experimento no artigo “Um experimento de Maxwell e as correntes moleculares de Ampère” [25], concluindo que — a partir dos dados positivos de Einstein e de Haas — o resultado da variação do ângulo  $\theta$  do giroscópio eletromagnético seria da ordem de  $\tan \theta = -0,00013$ . Um desvio dificilmente perceptível. Igualmente, o terceiro experimento foi reproduzido por Richard Chace Tolman (1881 – 1948) e Thomas Dale Stewart (1890 – 1958), em 1916, com um galvanômetro sensível a pequenas diferenças de potenciais e, diferentemente de Maxwell, obtiveram resultados positivos [35, 36].

### 3.2 Desdobramentos após Maxwell

Maxwell defendia como base epistemológica para a descrição dos fenômenos naturais uma física que partisse da existência de um meio que, ao apresentar pressões e tensões locais, intermediaria as interações entre dois objetos. Esta dinâmica se desenvolveria tanto nas taxas de variação de potenciais e campos, como nas propriedades do meio contido no espaço livre ou no interior dos objetos, expressas em constantes fundamentais. Além do mais, este meio estaria destituído de inércia. Destacamos que essa concepção estava intimamente ligada à sua forma de ver os fenômenos eletromagnéticos na sua totalidade, inclusive os relativos à luz. Assim, abstraiu a descrição fundamentada em forças entre os elementos interagentes nessa visão. Isto certamente direcionou a interpretação de seus experimentos, pois a “prova experimental” encontrada por Maxwell mostrava seu êxito em “provar” também a inconsistência em se associar uma massa inercial ao elemento fundamental responsável pelo eletromagnetismo. Isto promoveria um desestímulo às pesquisas de efeitos de corrente elétrica e demais fenômenos eletrodinâmicos como originados de forças entre partículas interagentes e obedecendo às leis de Newton. *Da mesma maneira, afetaria negativamente no desenvolvimento das teorias eletrodinâmicas que tinham esta concepção associada, sendo deixadas ao relento.* Por outro lado, dentro da linha filosófica de Maxwell, Oliver Heaviside (1850 – 1925), Joseph Larmor (1857 – 1942) e John Henry Poynting (1852 – 1914), dentre outros físicos, desenvolveram as conexões entre corrente e momento, porém, sem associá-las com transferência de massa ponderável.

No entanto, a questão paradigmática da inércia associada à uma partícula carregada não pôde ser dada como acabada. Dezoito anos depois do falecimento de Maxwell, Joseph John Thomson (1856 – 1940) publicou em 1897 o artigo intitulado “Raios Catódicos” [37]. Neste trabalho, o físico analisou o caso em que se consideraria os “raios catódicos” como um feixe de partículas. Desta maneira, calculou a razão entre a carga de uma destas partículas e sua massa ( $q_p/m_p$ ), obtendo o mesmo resultado para diferentes gases. Disto concluiu que, “[...] os átomos de diferentes elementos químicos são diferentes conglomerados

de átomos do mesmo tipo” [37, p. 311], chamando-os inicialmente de “átomos primordiais” [37, p. 313]. No mesmo ano, Lorentz apresenta uma teoria fundamentada nesta hipótese: a Teoria dos Elétrons [38]. Segundo Lorentz,

[...] esta teoria geral [de Maxwell], na qual expressamos as propriedades peculiares de diferentes corpos ponderáveis simplesmente atribuindo a cada um deles valores particulares da constante dielétrica  $\epsilon$ , da condutividade  $\sigma$  e da permeabilidade magnética  $\mu$ , já não pode mais ser considerada satisfatória quando desejamos obter uma compreensão mais profunda da natureza dos fenômenos. Se queremos entender o modo pelo qual as propriedades elétricas e magnéticas dependem da temperatura, da densidade, da constituição química ou do estado cristalino das substâncias, nós não podemos estar satisfeitos simplesmente atribuindo estes coeficientes à cada substância — cujos valores devem ser experimentalmente determinados — nós somos obrigados a recorrer à alguma hipótese a respeito do mecanismo que está na base dos fenômenos.

É por essa necessidade que se levou à concepção de *électrons*, i. e., de partículas extremamente pequenas, carregadas com eletricidade, as quais estão presentes em um número imenso em todos os corpos ponderáveis e, por cujas distribuições e movimento, esforçamo-nos em explicar todos os fenômenos elétricos e ópticos que não estão limitados ao éter livre. [39, p. 8]

Esta teoria agrega inúmeros partidários. Assim, uma vez que a luta de paradigmas se dava no fato da corrente elétrica ser composta ou não por partículas se movimentando, não é sem razão que o artigo de Einstein de 1905 — que dá gênese à relatividade restrita — tem por título: “Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento” [40].

E não é coincidência que no mesmo ano Paul Langevin (1872 – 1946) logrou modelar teoricamente a relação de dependência da susceptibilidade magnética de substâncias paramagnéticas com a temperatura, ao assumir a existência de um momento de dipolo magnético  $\vec{\mu}$  por conta da circulação dos “*électrons*”. Esta relação fora encontrada experimentalmente em 1895 por Pierre Curie (1859 – 1906), e a expressão foi batizada como *lei de Curie-Langevin*.

Igualmente, no ano seguinte, Walter Kaufmann (1871 – 1947) publica o trabalho “sobre a constituição dos elétrons” [41]. E dando sequência à defesa desta concepção, em 1908, Owen Willians Richardson (1879 – 1959) buscou observar durante a magnetização de um cilindro de ferro, a sua rotação como consequência da conservação de momento [42].

*Este foi, justamente, o mesmo efeito investigado por A. Einstein e W. de Haas sete anos mais tarde, e que tratamos aqui.* Richardson, no entanto, não obteve os resultados positivos alcançados posteriormente pelos diversos experimentadores que se seguiram [43, 7, 25].

Em 1912 A. Schuster desenvolveu pesquisas sobre a origem do magnetismo terrestre [44], sob a mesma visão concebida por A.-M. Ampère: por conta de correntes elétricas no interior da Terra [45].

Ainda, antes de 1915, Samuel Jackson Barnett (1873 – 1957) em um pequeno artigo de uma página, em 1909, supõe que toda substância magnética deve tornar-se magnetizada pelo desenvolvimento de uma velocidade angular [46]. Assim, ele procurava o efeito oposto ao investigado por Richardson. Ao não obter resultado satisfatório, Barnett explica que naquela ocasião utilizou um equipamento que não fora desenvolvido para o experimento em questão e que posteriormente investigaria cuidadosamente sua hipótese.

Em dezembro de 1914, Barnett descreveu à *American Physical Society* uma série de experimentos feitos naquele ano sobre a magnetização de uma grande haste de aço por rotação [43], sendo publicados somente em 1915, após os trabalhos de Einstein e de Haas sobre as correntes moleculares de Ampère. Os dois cientistas não deixaram este fato em branco:

Nosso colega [Arnold] Berliner [1862 – 1942] recentemente nos enviou duas notas de S. J. Barnett que foram publicadas em 30 julho de 1915 e 1 de outubro de 1915 [...].

Barnett começou seus experimentos há seis anos atrás e agora diz que resultados positivos foram alcançados. [...] Experimentalmente esse problema [a magnetização de uma haste de ferro por repentinas rotações] é incomparavelmente mais difícil que aquele empreendido por nós, que é verificar o momento angular que ocorre devido a uma mudança na magnetização. Os nossos experimentos e os do Sr. Barnett se completam de uma maneira gratificante. [47, p. 111]

Por fim, Heik Kamerlingh Onnes (1853 – 1926), prêmio Nobel de Física de 1913, tem seu trabalho divulgado sob a seguinte nota editorial publicada na *Nature* em 1914: “Demonstração experimental de uma corrente molecular de Ampère em um condutor quase perfeito” [48]. Assim, embora ligada à tradição de Maxwell, a concepção da corrente elétrica se dar por conta de correntes materiais voltava a ter força.

## 4 As Hipóteses iniciais e o experimento

### 4.1 Ampère e as correntes moleculares

Em 1822 André-Marie Ampère terminou por desenvolver as bases fundamentais sobre as quais instituiu a identidade entre os fenômenos puramente magnéticos — descritos por Augustin Coulomb (1738 – 1806) como a interação entre duas “partículas magnéticas” (ou dois polos) ao longo da reta que os une — os efeitos eletromagnéticos — descoberto por Hans Christian Ørsted (1777 – 1851) e descritos por Jean-Baptist Biot (1774 – 1862) como a interação entre um segmento de um fio com corrente elétrica e um polo, com direção perpendicular à reta que os une — e os efeitos eletrodinâmicos — descobertos pelo próprio Ampère, o qual cunhou o termo “eletrodinâmica”, e os descreveu como a interação entre dois elementos de corrente ao longo da reta que os une. Em 1826 Ampère explicou que,

Na Suécia, na Alemanha e na Inglaterra, acreditou-se poder explicá-los apenas pelo fato da ação mútua entre dois ímãs, tal como Coulomb havia determinado. As experiências que nos fornecem os movimentos de rotações contínuas estão em contradição manifesta com essa ideia. Na França, os que não adotaram a minha teoria são obrigados a considerar os três gêneros de ação, que reduzi a uma lei comum, como três tipos de fenômenos absolutamente distintos entre si. [...] Além disso, embora o Sr. Biot tenha denominado por força elementar aquela [força] cujo valor ele determinou para o caso em que um elemento de fio condutor age sobre cada uma das partículas magnéticas, está claro que não se podem considerar verdadeiramente elementares, nem uma força que se manifesta na ação entre dois elementos que não são da mesma natureza, nem uma força que não age ao longo da reta que une os dois elementos. [2, p. 454]

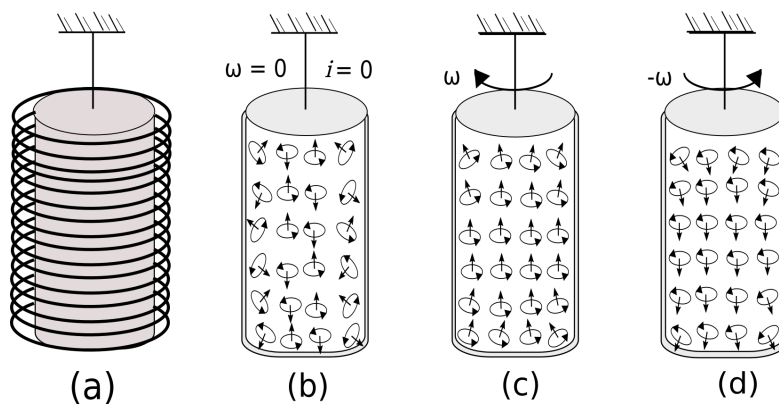
Para ele, os três fenômenos são originados da mesma interação eletrodinâmica elementar que “tomando-a como ponto de partida, demonstrei que se podem deduzir, por um cálculo puramente matemático, os valores das outras forças, tais como são dadas pela experiência” [2, p. 460]. Vale a pena destacar que Ampère entendia que sua força também não era “verdadeiramente elementar”, ele sabia que ela deveria se reduzir a uma força entre partículas em movimento [2, pp. 466–468]. Lembrando que a palavra “molecular” significa “a menor estrutura possível” constituinte da estrutura macroscópica — não confundir com a definição química contemporânea de “molécula” — o criador da teoria eletrodinâmica defendeu que a magnetização dos materiais se daria por conta do alinhamento de correntes circulares de tamanho “molecular” [2, pp. 111–117]. E de sua força entre elementos de corrente, mostrou que o dipolo magnético coulombiano ( $\vec{\mu}$ ) teria o seguinte equivalente eletrodinâmico:

$$\vec{\mu} = iS\hat{n},$$

onde  $\hat{n}$  é o vetor unitário normal à superfície  $S$ , que por sua vez está envolvida pela corrente  $i$ .

## 4.2 O modelo de Einstein e de Haas

A ideia de Ampère das correntes moleculares, foi a motivação por detrás do arranjo experimental adotado por Einstein e W. de Haas. O experimento desenvolvido em parceria consiste em uma barra de ferro pendurada por um fio fino no interior de um solenoide, Figura 5 (a).



**Figura 5:** Esquema do raciocínio experimental. Em (a) uma barra de ferro está suspensa por um fio fino no interior de um solenoide. Em (b) as “correntes moleculares” estão dispersas dentro de uma barra de ferro (a seta perpendicular indica o momento magnético) e não há corrente no solenoide. Em (c), quando as correntes moleculares são alinhadas pela ação da corrente externa no solenoide, o sistema responde desenvolvendo uma dada velocidade angular. Em (d) quando as correntes moleculares são alinhadas no sentido contrário, o sistema responde desenvolvendo uma velocidade angular no sentido contrário.

Ao ligar o solenoide — momento em que uma corrente passa pela bobina — a barra gira levemente em torno de seu eixo. Este fenômeno é atribuído à conservação do momento angular do sistema, onde o momento angular da barra como um todo responde à variação do momento angular atrelado às “correntes moleculares” ou “correntes elementares” que se alinham ao responder à ação do solenóide. Este método,

segundo a carta citada de Einstein, foi decisivo para fornecer a “firme prova experimental das correntes moleculares de Ampère” [17, p. 87]. Cabe ressaltar que apesar desta configuração experimental ser bem mais simples do que os experimentos vistos na seção anterior, não encontramos nenhuma informação de que Maxwell possa tê-la desenvolvido.

Assumindo um sistema de partículas orbitando ao redor de um centro de massa teríamos que o momento angular total do “circuito molecular” seria:

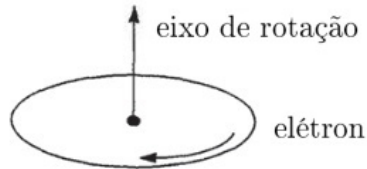
$$\vec{l} = I_{(t)} \vec{\omega}_{(t)},$$

onde  $I_{(t)}$  e  $\omega_{(t)}$  são respectivamente o momento de inércia e a velocidade angular em um dado instante  $t$ .

Assumindo agora outra hipótese não correlacionada, Einstein usa a “Teoria dos Elétons” de Lorentz para justificar a origem das correntes moleculares, onde,

De acordo com a teoria dos elétrons [de Lorentz], mecanicamente, toda molécula para- e ferromagnética é uma corrente circular cujo eixo coincide com o eixo [de seu momento] magnético. [56, p. 89]

Einstein também tinha conhecimento do artigo “Sobre a constituição de átomos e moléculas” publicado em 1913 [54] por Niels Henrik David Bohr (1885 – 1962) a respeito do modelo planetário atômico, isto pôde ter igualmente motivado a execução deste experimento. Sendo assim, Einstein modelou a “corrente molecular” como uma partícula fundamental de carga  $e$  e massa  $m_e$ , orbitando ao redor de um centro, Figura 6.



**Figura 6:** Reprodução de um esboço de Einstein feito em uma carta explicando o experimento [17, p. 87].

Desta forma, o momento angular de translação da partícula elementar ficaria:

$$\begin{aligned} \vec{l}_e &= m_e r_T^2 \vec{\omega}_T = \\ &= m_e r_T^2 (2\pi f_T) \hat{n} = \\ &= 2m_e f_T S_T \hat{n} . \end{aligned}$$

Onde  $r_T$ ,  $\omega_T$ ,  $f_T$  e  $S_T$  são, respectivamente, o raio, a velocidade angular, a frequência e a superfície de translação.

Igualmente, pela equação do momento de dipolo de Ampère, ao assumir o valor de  $i$  igual à  $dq/dt$ , Einstein e W. de Haas calcularam que ao completar uma volta:

$$\begin{aligned} \vec{\mu}_e &= \frac{dq}{dt} S_T \hat{n} = \\ &= \frac{e}{T} S_T \hat{n} = \\ &= e f_T S_T \hat{n} . \end{aligned}$$

Continuando, desenvolveram o seguinte cálculo para a proporção entre o momento angular total da barra de ferro ( $\vec{L}$ ) e o momento magnético total ( $\vec{M}$ ):

$$\begin{aligned} \vec{L}/\vec{M} &= \frac{\sum^N \vec{l}_e / \sum^N \vec{\mu}_e}{\sum^N l_e / \sum^N \mu_e} \Rightarrow \\ L/M &= \frac{\sum^N l_e / \sum^N \mu_e}{\sum^N l_e / \sum^N \mu_e} = \\ &= N \cdot (2m_e f_T S_T) / N \cdot (e f_T S_T) = \\ &= 2m_e / e . \end{aligned}$$

Assim defini-se:

$$\lambda \equiv \frac{L}{M} = \frac{2m_e}{e} .$$

Por fim, somou-se a hipótese de que as partículas encontradas por Thomson seriam também as mesmas partículas cujo momento de translação deveria ser responsável pelo momento magnético “molecular” de forma que,

$$\frac{e}{m_e} = \frac{q_p}{m_p} .$$

O valor da razão  $q_p/m_p$  encontrada em 1897, no sistema CGS de unidades eletromagnéticas, foi igual a  $1,7 \cdot 10^7$  [53]. Este valor também foi usado por Barnett [34], e Bohr no seu célebre artigo. O valor considerado atualmente no SI é igual a  $1,758820088(39) \cdot 10^{11} C/kg$  [55].

Assim, uma vez que se assumiu as partículas encontradas por Thomson como os elétrons da teoria de Lorentz, os dois cientistas previram que o resultado a se encontrar experimentalmente para  $\lambda$  seria:

$$\lambda_p = 2 \cdot \frac{m_p}{q_p} = \frac{1}{\gamma_p} = 1,2 \cdot 10^{-7} .$$

O valor de  $\gamma_p$  é denominado atualmente como *razão giromagnética clássica* do elétron.

## 5 A revisão do resultado e o *Spin* do elétron

Qualitativamente o experimento foi um sucesso. A barra de ferro introduzida no interior do solenoide apresentou uma variação de sua velocidade angular ao ser magnetizada. Do ponto de vista quantitativo, Einstein e de Haas também anunciaram o sucesso nos experimentos. Apontado o valor obtido como  $\lambda = 1,1 \cdot 10^{-7}$  e um erro de aproximadamente 10 %.

No entanto, ao escrever à Geertruida de Hass, Einstein afirma:

Eu calculei um novo método para construir a curva [de dados experimentais], o qual seu querido marido registrou de uma forma particularmente meticulosa. Embora seja usado aqui a linearidade do termo de normalização, a legitimidade do precedente está provado com base na curva. É estranho que pequenos deslocamentos apareçam sistematicamente incorretos; E não consigo dar nenhuma explicação para isso. [57, p.86]

Como veremos na tradução a seguir, estas anomalias foram descartadas de maneira a fazer com que o valor experimental concordasse com o valor teórico esperado.

Porém, diversos estudos posteriores realizados por outros pesquisadores — tal como John Quincy Stewart (1894 – 1972), “Sobre o momento angular acompanhando o momento magnético no ferro e níquel” [58]; Emil Beck (1881 – 1965), “Para a prova experimental das correntes de Ampère” [59]; e Gustaf Arvidsson, “Um estudo sobre as correntes moleculares de Ampère de acordo com o método de A. Einstein e W. J. de Haas” [60] — mostraram inequivocamente o valor experimental igual a  $\lambda = 0,57 \cdot 10^{-7}$ , ou seja,

$$\frac{I_e}{\mu_e} \approx \frac{1}{2} \frac{I_p}{\mu_p}.$$

Em uma carta de 1919 a Paul Ehrenfest (1880 – 1933), Einstein comenta o resultado de Beck:

Um experimentador muito habilidoso em Zurique (Dr. Beck) encontrou o efeito giromagnético medido por mim e De Haas apenas a metade do valor que a teoria prevê. Aquele homem definitivamente tem de ser levado a sério. As medidas deveriam ser repetidas a fim de esclarecer ou decidir a questão. [61]

Este resultados levaram Alfred Landé (1888 – 1976), em 1922, a introduzir um fator de proporcionalidade *ad hoc* à expressão de Einstein para o cálculo do momento de dipolo das correntes moleculares e, assim, coincidir com o resultado experimental:

$$\frac{\mu_e}{I_e} = g_e \gamma_p.$$

O termo  $g_e$  é conhecido atualmente como *fator de Landé*.

É importante notar que a insistência dos resultados experimentais serem quantitativamente discrepantes do resultado esperado teoricamente, não refuta a hipótese da existência das correntes moleculares — afinal, foi constatada a variação de momento angular — mas põe em dúvida as demais hipóteses tomadas como certas em cada passo do cálculo tais como:

- O momento de inércia da corrente responsável pela magnetização é realmente  $I_e = m_e r^2$ ?
- O valor do módulo do versor normal do momento angular total seria o mesmo do momento de dipolo?
- As superfícies admitidas para o momento angular total e o momento magnético teriam o mesmo valor?
- As frequências admitidas para o momento angular total e o momento magnético teriam o mesmo valor?
- Existiriam partículas mais elementares na barra de ferro com uma proporção  $m'_e/q'_e \neq m_p/q_p$ ?

Todos estes pontos na verdade indicam uma coisa: A *corrente molecular* de Ampère, não seria por conta do movimento de traslação da partícula encontrada por Thomson, que por sua vez, possivelmente, teria uma estrutura interna.

Mas esta conclusão era extremamente difícil de se aceitar. Dada as forças e tipos de interações admitidas pela teoria dos elétrons de Lorentz, somente uma partícula que não possuísse estrutura interna, uma *partícula fundamental*, manteria de maneira definitiva uma carga elétrica diferente de zero e, ao mesmo tempo, seria estável. Neste modelo não havia uma maneira de se manter estavelmente agregado um conjunto de partículas fundamentais de mesma carga.

Disto, os partidários da teoria de Lorentz, tal como Einstein, de Haas, Barnett e Bohr, definiram os “átomos primordiais” encontrados experimentalmente por Thomson em 1897, como as partículas elementares desta teoria, denominadas por “elétrons”. Daí a atribuição a J. J. Thomson a “descoberta dos elétrons”, embora ele não tenha usado esse termo.

Assim, a comunidade científica abandonou por completo a defesa que a magnetização elementar dos materiais se dava por correntes elementares! *Postulou-se então que o momento angular seria uma qualidade intrínseca à partícula* e que sua constatação não estava associada de nenhuma maneira com um movimento mecânico. Assim originou-se o conceito do *spin* do elétron.<sup>3</sup>

No entanto, Einstein não desejava nem admitir uma estrutura interna para partícula de Thomson e nem admitir o conceito do *spin* como um momento angular intrínseco sem causa mecânica. Admitir que  $g_e$  poderia possuir um valor diferente de 1, era o mesmo que assumir uma das duas hipóteses. De maneira que a falta de outra explicação para o resultado discrepante, fez com que Einstein e de Haas cometessem

[...] um erro clássico de seletividade excessiva. [...] Einstein, convencido que o valor “certo” havia de ser 1, decidiu que 1,02 era o “melhor” valor e descartou o outro valor - e somente o “melhor” valor foi reportado à *Physical Society*. Até mesmo seis anos depois, após várias repetições do experimento terem estabelecido o valor 2 fora de qualquer dúvida razoável, **Einstein teimosamente persistiu em sua crença que a razão giromagnética [na verdade, o fator de Landé] fosse 1.** [63, Ênfase e entre colchetes nossos, p. 214]

Possivelmente este foi um dos assuntos que contribuiu para que Einstein não fosse afim de determinados postulados da mecânica quântica [65].

## 6 Considerações Finais

Observamos dois eventos experimentais importantes na história da física no que diz respeito à concepção eletrodinâmica. O primeiro foi o esforço experimental de Maxwell para defender que as partículas fundamentais da interação eletrodinâmica não possuíam inércia. O segundo, foi a obtenção por Einstein de um fenômeno inercial (a conservação de momento angular) em um experimento eletromagnético. No entanto, sua base teórica o fez desconsiderar os resultados quantitativos sistemáticos, enveredando os valores obtidos para o que esperava teoricamente. Por outro lado, a confirmação do resultado inesperado não fez com que a comunidade científica revisasse as bases teóricas, mas adicionou-se um outro elemento teórico complementar: a existência do momento angular intrínseco e o *spin eletrônico*.

Dada a relação entre teoria, experimento e experimentador, entendemos que o estudo desenvolvido aqui reforça a observação de Kunh a esse respeito:

<sup>3</sup>O resultado do experimento de Stern-Gerlach, de fato, trata da *quantização* deste spin [62].

Imediatamente outro estereótipo forçado pelos livros-texto é posto em questão [quando consideramos os resultados que os cientistas obtêm quando fazem medições]. Nos livros-texto, os números que resultam da medição aparecem geralmente como os arquétipos dos “fatos irreduzíveis e teimosos” aos quais o cientista deve, pela luta, fazer suas teorias estarem conformes. Mas, na prática científica, como vista através da literatura periódica, o cientista frequentemente parece um tanto estar lutando com os fatos, tentando forçá-los em conformidade com uma teoria que ele não duvida. [64, p.171]

Observa-se com bastante ênfase neste trabalho o quanto as convicções epistemológicas direcionam a interpretação dos dados experimentais.

Igualmente reforça-se que a leitura de artigos clássicos originais, sua tradução, análise e contextualização, englobam um método válido para o estudo da história da física e seus conceitos.

Por fim, sabe-se que a forma como os livros didáticos apresentam as teorias têm por objetivo fazer com que se absorva da maneira mais ótima possível os conceitos e teorias consagradas no paradigma, “uma síntese do que a comunidade científica contemporânea acredita saber, e do principal uso para o qual aquele conhecimento pode ser colocado” [64, p.167]. Por isso, para se ter uma educação científica mais completa, inclusive com o desenvolvimento da crítica responsável à ciência, acreditamos que não deva ser descartada do ambiente de aprendizagem a leitura de textos originais contextualizados. Igualmente esperamos que nosso trabalho contribua nesse sentido.

## 7 Tradução

Grandeza	Original	Tradução
Momento de dipolo magnético	$m$	$\vec{\mu}$
Área	$F$	$S$
Frequência	$n$	$f$
Massa do elétron	$m$	$m_e$
Momento angular da partícula	$\mathfrak{M}$	$\vec{l}$
Momento angular total do sistema	$\sum \mathfrak{M}$	$\sum \vec{l} = \vec{L}$
Magnetização	$I$	$\sum \vec{\mu} = \vec{M}$
Torque	$\theta$	$\vec{\tau}$
Valor de saturação da magnetização	$I_s$	$\vec{M}_s$
Momento de inércia	$Q$	$I$
Massa do cilindro	$M$	$m_c$
Ângulo	$\alpha$	$\theta$
Amplitude	$ \alpha $	$ \theta $
Amplitude máxima	$ \alpha _m$	$ \theta _m$

**Tabela 1:** Símbolos trocados do original nesta tradução.

Segue a tradução do artigo de A. Einstein e W.J. de Haas “*Experimental proof of the existence of Ampère’s molecular currents*”.

Os nomes próprios em caixa alta, o padrão de título das seções, a numeração das equações, o padrão de rótulo das figuras e posição em relação ao texto, assim como a numeração delas, mantivemos como no original.

Denominamos por notas do autor como [N. A. *b*] onde *b* é o número da nota no texto original. Estas notas e as dos tradutores [N. T.] estarão sob a mesma contagem, terão seu número de referência entre parênteses, iniciada a partir do número (1). As palavras entre colchetes são dos tradutores. Também indicamos entre colchetes o ponto de início de cada página no original.

O sistema de unidades utilizado é sempre o CGS. Muitos dos valores apresentados não vieram acompanhados do símbolo de suas respectivas unidades. Preferiu-se manter assim. Também, no original, algumas unidades vêm por extenso. Adotamos a regra gramatical atual onde o símbolo de uma unidade de medida deve ser escrito maiúsculo se derivado de um nome próprio, mas seu nome por extenso deve ser escrito em minúsculo, tal como *G* (gauss) e *A* (ampere).

Nas equações, introduzimos a notação vetorial moderna. Igualmente, para se identificar melhor as grandezas físicas envolvidas, trocamos algumas notações originais por símbolos atuais, conforme Tabela 1.

---

[pág. 696]

**Física.** - “*Prova experimental da existência das correntes moleculares de Ampère.*” Pelo Prof. A. Einstein e Dr. W. J. de Haas.

(Comunicado pelo Prof. H. A. Lorentz),

(Comunicado na reunião de 23 de abril de 1915).

No tempo em que foi descoberto por OERSTED que as [inter]ações magnéticas não são exercidas somente por ímãs permanentes, mas também por correntes elétricas, pareceu existir duas maneiras inteiramente diferentes com as quais um campo magnético pode ser produzido. Essa concepção, no entanto, dificilmente seria considerada como satisfatória e os físicos logo tentaram atribuir às duas ações uma mesma causa.<sup>(1)</sup> AMPÈRE logrou fazê-lo por sua célebre hipótese das correntes circulando em volta das moléculas sem encontrar qualquer resistência [elétrica].

---

<sup>(1)</sup>[N. T.] Quando os autores afirmam “os físicos logo tentaram atribuir às duas ações a uma mesma causa”, dá-se a entender que a comunidade científica da época organizou um esforço coletivo para atingir este objetivo, e isto não foi verdade. De fato, diversos cientistas associavam causas diferentes para modelar as ações. Por exemplo, até falecer, Ørsted defendeu que o eletromagnetismo era decorrente de uma interação de um polo (real) magnético com o que denominou por “conflito elétrico”. O mesmo aconteceu com Biot e Savart, que defendiam que a corrente elétrica alterava distribuição de polos magnéticos reais no interior do fio, que por sua vez interagiriam com os polos do ímã. Igualmente, Faraday defendeu que a interação fundamental consistia no movimento circular de um polo magnético ao redor de uma corrente voltaica. E todos estes cientistas afirmavam que a interação entre ímãs era a interação, mediada ou não, entre *polos reais*. Ampère foi o *único* que estudou a fundo estes fenômenos a fim de lhes atribuir a mesma causa: a interação entre correntes elétricas. E sua teoria não foi recebida pacificamente. Foi combatida desde sua gênese. Para mais detalhes, ler [2] ou [52].

A mesma suposição é feita na teoria dos elétrons, na forma desenvolvida, por exemplo, por H. A. LORENTZ,<sup>(2)</sup> com a única diferença que, como as correntes elétricas em geral, as correntes moleculares são agora consideradas uma circulação de cargas elementares ou elétrons.

Não se pode negar que esses pontos de vista suscitam algumas objeções. Uma delas é ainda mais grave que era nos dias de AMPÈRE; é difícil conceber uma circulação de eletricidade livre de toda resistência e, conseqüentemente, continuar para sempre. De fato, de acordo com as equações de MAXWELL, os elétrons circulando perderiam sua energia por radiação; portanto, as moléculas<sup>(3)</sup> de um corpo magnético perderiam gradualmente seus momentos magnéticos.<sup>(4)</sup> Nada do tipo tendo já sido observado, a hipótese parece ser incompatível com uma validade geral das leis do eletromagnetismo.

Mais uma vez, a lei de CURIE-LANGEVIN requer que o momento magnético de uma molécula deve ser independente da temperatura e ainda deve existir no zero absoluto. A energia do elétron giratório seria, portanto, uma verdadeira energia do ponto zero. Na opinião de muitos físicos, no entanto, a existência de uma energia desse tipo é bastante improvável.<sup>(5)</sup>

Parece, por essas observações, que, afinal de contas, há tanto a ser dito a favor da hipótese de AMPÈRE como contra ela e que a questão diz respeito a importantes princípios físicos. Nós, portanto, fizemos os experimentos a serem aqui descritos, pelos quais fomos capazes de mostrar que o momento magnético de uma molécula de ferro é realmente devido a uma circulação de elétrons.<sup>(6)</sup>

A possibilidade de uma prova experimental encontra-se no fato de que todo elétron negativo<sup>(7)</sup> circulando em um percurso fechado tem um momento angular

[pág. 697]

<sup>(2)</sup>[N. T.] Como citado, ao contrário da tradição de Maxwell, a teoria de Lorentz era uma das que defendiam a corrente elétrica como a circulação de partículas.

<sup>(3)</sup>[N. T.] Como visto antes, nota-se que aqui o significado de molécula se refere “à menor estrutura complexa”, e não à *molécula química* que denominamos atualmente.

<sup>(4)</sup>[N. T.] Optamos por traduzir o termo original *magnetic moment* como “momento magnético”, apesar do termo técnico atual ser “momento de dipolo magnético”.

<sup>(5)</sup>[N. T.] Os autores confrontam as críticas segundo a teoria de Maxwell com os recentes experimentos e modelos *ad hoc*. Sendo assim, optam por admitir a possibilidade do movimento circular do elétron pela via heurística, tal como o recém elaborado modelo atômico de Bohr de 1913, o qual postulava que o elétron poderia girar em determinadas órbitas estacionárias sem irradiar energia e, portanto, sem colapsar. Por outro lado, percebe-se o desconhecimento por parte de Einstein e W. de Haas da existência de uma base teórica prévia para esta suposição, o modelo planetário de Wilhelm Eduard Weber (1804 – 1891), o qual descrevera uma molécula (átomo) estável com um núcleo de carga positiva e uma eletrosfera de carga negativa, partindo exclusivamente das interações descritas na sua força eletrodinâmica [66]. Entre outros aspectos, a teoria de Weber era fortemente baseada na ideia da corrente elétrica como um fluxo de partículas, e, como vimos, este modelo foi combatido *experimentalmente* por Maxwell.

<sup>(6)</sup>[N. T.] Na verdade, o que foi medido foi a variação do momento angular, o que sugere a existência de uma rotação eletrodinâmica de partículas com inércia. A conclusão de que esta rotação é dada pelas partículas assumidas como “elétrons” se dá, neste artigo, somente no momento em que se detecta a concordância entre o resultado experimental e o cálculo teórico.

<sup>(7)</sup>[N. T.] Até então o nome “elétron” era dado para a partícula elementar com carga diferente de zero, seja positiva ou negativa. Daí utilizar o termo “elétron negativo” sem ser redundante. Lembra-se que o experimento de espalhamento realizado por Ernest Rutherford (1871 – 1937) foi em 1917. Só após este resultado é que se iniciou a construção do modelo atômico, onde o núcleo do átomo sempre seria de uma partícula massiva de carga elementar positiva, o próton, circundado sempre por partículas de carga elementar negativa, o elétron. Mesmo assim, em 1924, Robert Andrews Millikan (1868 – 1953), defende a manutenção do nome “elétron” para qualquer partícula com carga elementar, seja esta carga positiva ou negativa [67].

na direção oposta ao vetor que representa seu momento magnético, de que a razão entre os dois momentos tem um valor definido que é independente das dimensões geométricas e do tempo de circulação. A molécula magnética se comporta como um giroscópio cujo eixo coincide com a direção da magnetização.<sup>(8)</sup> Toda mudança do estado magnético envolve uma alteração da orientação do giroscópio e do momento angular dos elementos magnéticos. Em virtude da lei de conservação do momento angular, a mudança do momento angular “magnético” deve ser compensada por uma mudança igual e oposta no momento angular da matéria ponderável. A magnetização de um corpo deve, portanto, dar origem a um torque, que faz o corpo girar.<sup>(9)</sup>

### §1. *Momento magnético e momento angular de uma molécula.*

O momento magnético de uma corrente de intensidade  $i$  que flui ao longo de um círculo de área  $S$  é dado pela fórmula<sup>(10)</sup>

$$\vec{\mu} = iS\hat{n},$$

ou, se a corrente consiste em um elétron circulando  $f$  vezes por segundo, por

$$\vec{\mu} = feS\hat{n}. \quad (1)$$

Ele pode ser representado por um vetor perpendicular ao plano do círculo, com a direção positiva deste vetor correspondendo, na maneira usual, à direção positiva da corrente.<sup>(11)</sup>

O momento angular é

$$\vec{l} = 2m_e f S \hat{n}, \quad (2)$$

se deixarmos coincidir sua direção positiva com o do momento magnético.

Assim:

$$\vec{l} = \frac{2m_e}{e} \vec{\mu}. \quad (3)$$

Para um corpo no qual um certo número de elétrons estão circulando, isso se torna

$$\vec{L} = \frac{2m_e}{e} \sum \vec{\mu},$$

ou, se denotarmos a magnetização<sup>(12)</sup> por  $\vec{M}$

<sup>(8)</sup>[N. T.] Nos parece que, nesta frase, há um erro tipográfico no original. Lá lê-se o termo *wich* — uma variação do inglês antigo para *wick* (morada, cidade) [68]. Acreditamos que o termo correto é *which*, que dá pleno sentido à oração.

<sup>(9)</sup>[N. A. 1] Este artigo se encaminhava para imprimir quando soubemos que O. W. RICHARDSON (Phys. Ver. Vol. 26, 1908 p. 248) já procurara pelo efeito em questão, sem, contudo, obter um resultado positivo.

<sup>(10)</sup>[N. T.] Seguindo a notação vetorial moderna, introduzimos o vetor unitário  $\hat{n}$ , que tem sua direção perpendicular ao plano da rotação, e seu sentido positivo determinado pela regra da mão direita.

<sup>(11)</sup>[N. T.] A direção positiva da corrente foi estabelecida por Ampère em 1820, ao afirmar que “[...] nomearemos *direção da corrente elétrica* aquela que segue o hidrogênio e as bases dos sais, quando a água ou uma substância salina fizer parte do circuito e for decomposta pela corrente [...]” [2, p. 305].

<sup>(12)</sup>[N. T.] Atualmente, “A magnetização  $\mathbf{M}$  é, por definição, o momento de dipolo magnético por unidade de volume” [69, p. 233]. Neste texto, a magnetização é a resultante do momento de dipolo magnético do objeto macroscópico.

[pág. 698]

$$\vec{L} = \frac{2m_e}{e} \vec{M}. \quad (4)$$

## §2. Consequência da existência de um momento angular magnético.

Qualquer mudança do momento angular  $\vec{L}$  de um corpo magnetizado dá origem a um torque  $\vec{\tau}$  determinado pela equação vetorial

$$\vec{\tau} = - \sum \frac{d\vec{l}}{dt} = 1,13 \cdot 10^{-7} \frac{d\vec{M}}{dt}, \quad (5)$$

onde o coeficiente numérico foi deduzido do valor conhecido de  $\frac{e}{m_e}$  para o elétron negativo.

Tem sido nosso objetivo verificar a relação expressa por (5). Nós iremos mostrar primeiramente que o efeito calculado não é muito pequeno para ser observado. Seja o corpo um cilindro de ferro de raio  $R$ , o qual pode girar em volta de seu eixo vertical. Iremos deduzir a partir de (5) a velocidade angular  $\omega$  que o cilindro adquire pela reversão de uma magnetização longitudinal, que supomos ter o valor de saturação  $\vec{M}_s$ . Denotando por  $I$  o momento de inércia do cilindro e escrevendo  $\lambda$  para o coeficiente acima  $1,13 \cdot 10^{-7}$ , encontramos

$$I\omega\hat{n} = \int \vec{\tau} dt = 2\lambda\vec{M}_s.$$

Agora, se o valor para a saturação de magnetização por  $cm^3$  é igual a 1000 — o que não é uma estimativa elevada — temos que  $M_s = \frac{m_c}{7,8} \cdot 1000$ . O momento de inércia é  $I = \frac{1}{2} m_c R^2$ , e, [assim], encontramos para  $R = 0,1 cm$

$$\omega = 0,6 \cdot 10^{-2},$$

uma velocidade angular facilmente observável.

## §3. Descrição do método.

À primeira vista, parece que a equação (5) pode ser testada da seguinte maneira. Um cilindro  $C$  de ferro macio é suspenso por um fino fio  $D$  coincidindo com o prolongamento do eixo do cilindro e o período das oscilações de torção sendo uns poucos segundos. Seja o cilindro  $C$  rodeado por uma bobina  $K$ , cujo eixo coincide com o de  $C$ . Em seguida, revertendo a corrente em  $K$ , uma rotação em  $C$  deve ser observada. Na realidade, no entanto, este simples método não pode ser considerado. Como o campo da bobina não será uniforme, o cilindro provavelmente pode apresentar movimentos altamente irregulares, mascarando completamente o efeito procurado.

[pág. 699]

Melhores resultados são obtidos se o efeito é ampliado por ressonância. Com essa finalidade, uma corrente alternada tendo a mesma ou quase a mesma frequência de oscilação de  $C$  em torno do fio  $D$  é posta para fluir através da bobina.

Para as oscilações de  $C$  sobre o eixo vertical, sob a influência do torque  $\vec{\tau}$ , temos a equação

$$\vec{\tau} = (I\ddot{\theta} + \Theta\dot{\theta} + P\theta)\hat{z} \quad (6)$$

em que o ângulo  $\theta$ , o desvio em relação à posição de equilíbrio, é considerado positivo na mesma direção daquela da corrente nas espiras.  $I$  é o momento de inércia,  $\Theta$  a constante de torção do fio e  $P$  uma pequena constante de atrito. Ao invés de  $\Theta$  e  $P$ , introduziremos duas novas constantes

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\Theta}{I}}, \quad \varkappa = \frac{P}{2I}. \quad (7)$$

A primeira delas é  $2\pi$  vezes a frequência livre, como seria na ausência de atrito, ao passo que  $\varkappa$  é a constante de amortecimento. De fato, a oscilação livre (a equação pela qual é deduzida a partir de (6), colocando  $\vec{\tau} = 0$ ) é dada por

$$\theta = Ce^{-\varkappa t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \varkappa^2}t + p).$$

A equação diferencial (6) é facilmente resolvida se desenvolvermos  $\vec{\tau}$  como uma função de  $t$  em uma série de FOURIER. Agora, de acordo com (5),  $\vec{\tau}$  tem a mesma fase que  $\frac{d\vec{M}}{dt}$ . Assim, se a magnetização fosse proporcional à corrente, poderíamos representar diretamente  $\vec{\tau}$  como uma função harmônica cuja fase seria  $\frac{1}{4}\pi$  à frente daquela da corrente  $i$  na bobina. A proporcionalidade irá, no entanto, manter-se somente para pequenas intensidades. Se a amplitude de  $i$  é aumentada de modo que a magnetização se aproxime da saturação, a curva de magnetização toma uma forma diferente. Finalmente, para amplitudes muito grandes de  $i$ , a magnetização irá repentinamente passar de um valor de saturação para outro oposto, simultaneamente (exceto para uma pequena diferença de fase) com a mudança de direção da corrente. Agora, para este caso limite, o cálculo será feito.

O torque agindo no cilindro pode ser representado pela fig. 1, na qual a senoidal se refere à corrente  $i$ .<sup>(13)</sup>

[pág. 700]

<sup>(13)</sup>[N. A. 2] A curva com os picos acentuados representa o valor de  $\frac{d\vec{M}}{dt}$ , ao qual o torque  $\vec{\tau}$  é proporcional. Ele foi obtido do seguinte modo. O cilindro de ferro, que tem sua posição correta ao longo do eixo da bobina  $K$ , foi rodeado por um estreito tubo de vidro coberto pelas espiras e, imediatamente ao lado do tubo, outro semelhante, igual e coberto da mesma maneira foi colocado. As espiras dos dois tubos foram conectadas de tal maneira que uma corrente passando através deles flui em volta dos tubos em direções opostas.

Nessas circunstâncias, a corrente induzida nas espiras é exatamente proporcional a  $\frac{d\vec{M}}{dt}$ , a ação desmagnetizante dos polos da barra de ferro sendo eliminada, bem como a indução devido ao campo da bobina  $K$ . O gráfico da corrente induzida e, portanto, para  $\frac{d\vec{M}}{dt}$  ou  $\vec{\tau}$  foi obtido por meio de um oscilógrafo da SIEMENS AND HALSKE. A alternância da corrente  $i$ , representada pela senoide, foi registrada da mesma maneira.



Fig. 1.

Cada pico acentuado corresponde a uma reversão da magnetização e temos cada uma delas

$$\int \vec{\tau} dt = \pm 2\lambda \vec{M}_s. \quad (8)$$

Seja a origem  $t = 0$  coincidente com um ponto na fig. 1, onde a corrente passe da direção negativo para a positiva. Então, podemos escrever

$$i = A \sin \omega t, \quad (9)$$

e  $\vec{\tau}$  pode ser desenvolvido em uma série

$$\vec{\tau} = \left( \sum_{n=1}^{n=\infty} B \cos n\omega t \right) \hat{z}. \quad (10)$$

Desta série, somente o primeiro termo precisa ser considerado aqui. Como o efeito correspondendo a este é o único que é multiplicado pela ressonância, conseqüentemente os outros termos não têm influência sensível no movimento do cilindro. Agora, multiplicando (10) por  $\cos \omega t$  e integrando em um período completo  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  encontramos

$$\int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{+\frac{3\pi}{2\omega}} \vec{\tau} \cos \omega t dt = \left( \frac{\pi}{\omega} B_1 \right) \hat{z}.$$

No lado esquerdo,  $\vec{\tau}$  é diferente de 0 somente nos curtíssimos intervalos  $t = 0$  e  $t = \frac{\pi}{\omega}$ . Para o primeiro desses podemos colocar

[pág. 701]

$\cos \omega t = 1$  e para o segundo  $\cos \omega t = -1$ . Assim, usando (8), encontramos

$$B_1 \hat{z} = \frac{4\lambda\omega}{\pi} \vec{M}_s. \quad (11)$$

Ao invés de (6) temos agora a equação

$$(B_1 \cos \omega t) \hat{z} = (I\ddot{\theta} + \Theta\dot{\theta} + P\theta) \hat{z}, \quad (12)$$

cuja solução periódica é

$$\theta = \frac{B_1}{u} \cos(\omega t - \nu), \quad (13)$$

se as constantes  $u$  e  $v$  são determinadas por

$$\begin{cases} u \cos v = (\omega_0^2 - \omega^2)I \\ u \sin v = 2\kappa\omega I \end{cases} \quad (14)$$

Aqui, a quantidade  $u$ , para a qual daremos o sinal positivo, determina a amplitude enquanto que a fase de oscilação é dada pelo ângulo  $v$ . Para a amplitude, que iremos denotar por  $|\theta|$ , encontramos

$$|\theta| = \frac{B_1}{u} = \frac{4\lambda M_s}{\pi I \sqrt{\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega^2} + 4\kappa^2}} \quad (15)$$

Para  $\omega = \omega_0$  ela se torna um máximo  $|\theta|_m$ , ou seja

$$|\theta|_m = \frac{2\lambda M_s}{\pi I \kappa} \quad (16)$$

Assim como para a fase, primeiro observamos que, de acordo com (14),  $v = \frac{\pi}{2}$  para  $\omega = \omega_0$ . Se a frequência da corrente alternando é maior que a do cilindro, temos  $v > \frac{\pi}{2}$  e, no caso oposto,  $v < \frac{\pi}{2}$ . Quando  $\omega$  é posto para diferir mais e mais de  $\omega_0$ , a fase  $v$  se aproxima do valor  $\pi$ , no primeiro caso, e 0 no segundo. Se a constante de amortecimento,  $\kappa$ , é pequena, podemos dizer que estes valores limites irão ser alcançados já em distâncias bastante pequenas de  $\omega_0$ . Em nosso experimento, esse foi realmente o caso e podemos dizer, portanto, excetuando somente valores de  $\omega$  na vizinhança imediata de  $\omega_0$ , que  $v = \pi$  para  $\omega > \omega_0$  e  $v = 0$  para  $\omega < \omega_0$ . Levando-se em conta o que foi dito sobre a direção positiva, pode-se ver facilmente que, se a corrente  $i$  e o desvio  $\theta$  têm a mesma fase, o cilindro seria em cada momento desviado na direção que a corrente assume naquele momento dentro da bobina. Na realidade, a

[pág. 702]

fase das oscilações do cilindro está atrasada daquela da corrente por uma quantidade de  $v - \frac{\pi}{2}$ ; isso decorre de (9) e (13). Relembrando ainda que na dedução de (11) foi assumido que os elétrons em circulação são negativos e que, se fossem positivos, o sinal de  $B_1$  e a fase do efeito seriam revertidos. Somos levados à seguinte conclusão:

*Elétrons negativos.*

$\omega > \omega_0$ . A fase das oscilações do cilindro é um quarto de um período atrasada daquela da corrente.

$\omega < \omega_0$ . Ela é um quarto de um período avançada.

$\omega = \omega_0$ . A vibração tem a mesma fase que a corrente.

*Elétrons positivos.*

$\omega > \omega_0$ . A fase das oscilações do cilindro é um quarto de um período avançada daquela da corrente.

$\omega < \omega_0$ . Ela é um quarto de um período atrasada.

$\omega = \omega_0$ . A vibração do cilindro e a corrente têm fases opostas.

É importante notar que há uma diferença de fase de um quarto entre o torque ativo  $B_1 \cos \omega t$  e a corrente  $i = A \sin \omega t$ ; e, da mesma forma, entre o torque ativo e a magnetização alternante. Isso acontece sempre, independente dos valores relativos de  $\omega$  e  $\omega_0$  e do sinal dos elétrons em circulação.

#### §4. *Pequena descrição do aparato*

O campo alternante, que já foi mencionado várias vezes, foi excitado por duas bobinas colocadas com os seus eixos ao longo da mesma linha vertical e com uma distância entre elas de cerca de 1 *cm*. Elas foram montadas em um pé de bronze para que três parafusos pudessem dar diferentes inclinações. As bobinas foram conectadas em série e deram um campo de cerca de 50 gauss. O cilindro de ferro foi suspenso ao longo de seu eixo. Este cilindro, com 1,7 *mm* de diâmetro e, nos primeiros experimentos, com 7 *cm* de comprimento, foi cuidadosamente torneado em ferro macio. Centralmente em sua parte superior foi furado um buraco estreito de 0,3 *mm* de diâmetro no qual um fio de vidro apropriado foi selado. No meio do cilindro

[pág. 703]

usou-se um espelho muito leve feito a partir de uma lamínula de microscópio prateada. A luz de uma lâmpada de filamento único foi lançada sobre o espelho através do espaço entre as duas bobinas. Os raios refletidos formaram uma imagem em um escala colocada a uma distância de 45 *cm*. Quando o cilindro foi posto em vibração, essa imagem foi ampliada para uma banda e a largura dela determinou o desvio duplo.

De modo a obter ressonância, é claro que deve ser possível regular o comprimento do fio de vidro. Para esse propósito, utilizamos um dispositivo de fixação com o qual o fio de vidro pudesse ser firmemente mantido em diferentes pontos de seu comprimento.

A braçadeira e o fio em suspensão com o cilindro poderiam rotacionar juntos sobre um eixo vertical em uma coluna fixa. A corrente efetiva foi lida em um instrumento preciso. Finalmente, todo o aparato foi circundado por um dispositivo com o qual o campo magnético terrestre fosse compensado. Iremos voltar a isso mais adiante.

#### §5. *Os experimentos*

Iremos agora examinar as principais causas de perturbação.

1. Nas extremidades do cilindro, polos alternados são induzidos. Agindo sobre eles, a componente horizontal do campo terrestre pode dar origem a um torque alternando com a mesma frequência da corrente e tendendo a rotacionar o cilindro sobre um eixo horizontal. (Efeito I).

Rotações deste tipo não foram, contudo, observadas por nós.

2. De acordo com os pontos de vista de WEISS,<sup>(14)</sup> os cristais ferromagnéticos estão situados irregularmente em todas as direções. Por conseguinte, pode acontecer de alguns deles estarem direcionados

---

<sup>(14)</sup>[N. T.] Pierre Weiss (1865 – 1940) foi um cientista francês reconhecido pelo sucesso de sua teoria fenomenológica do ferromagnetismo, que ele concebeu e desenvolveu com bases em um amplo corpo de resultados experimentais. Sua teoria é fundamentada na hipótese da existência de um campo molecular proporcional à magnetização e atuando na orientação de cada momento atômico, como um campo magnético de grande intensidade.

Com sua teoria, ele foi capaz de explicar as conhecidas propriedades características de corpos ferromagnéticos (notavelmente, o súbito desaparecimento de ferromagnetismo acima de uma temperatura conhecida como o ponto

de tal maneira que seu magnetismo não é revertido pelo campo alternante. Neste caso, haverá uma componente horizontal de magnetização permanente, a qual, influenciada pela componente horizontal do campo magnético na bobina, dará origem a um torque alternante em volta do eixo vertical com a mesma frequência e fase do campo alternante. (Efeito II).

3. O eixo sobre o qual o cilindro irá rotacionar não coincidirá precisamente com o seu eixo magnético. Uma força magnética horizontal permanente tal como a do magnetismo terrestre irá, portanto, produzir oscilações de torção do cilindro. O torque que excita estas oscilações tem a mesma fase que a magnetização e (no caso de correntes fortes) que a própria corrente alternada.
4. Vê-se facilmente que as correntes de FOUCAULT que são induzidas

[pág. 704]

no cilindro não podem ter qualquer influência em nosso experimento, seu único efeito é um leve retardo das reversões magnéticas. Até onde podemos ver, os efeitos acima são os únicos que têm a mesma frequência que a corrente na bobina e, portanto, são ampliados pela ressonância. Quando a bobina foi conectada aos condutores de corrente alternada principais, a imagem na escala permaneceu perfeitamente em repouso enquanto o comprimento do fio suspenso não foi suficiente para fazer a frequência de uma vibração livre do cilindro quase coincidir com aquela do campo alternante. A ressonância apareceu e desapareceu novamente por uma alteração do comprimento do fio de  $1\text{ mm}$ , sendo o comprimento todo de  $8\text{ cm}$ .

A fim de encontrar o comprimento requerido para a ressonância e para ter certeza que o aparato suspenso não vibra em um dos seus modos mais elevados, usamos o seguinte método com o qual pudemos também determinar o momento de inércia do cilindro.

Na extremidade inferior do cilindro de ferro, selamos uma pequena barra transversal de cobre cujo momento de inércia era  $10,7$ .

Para o cálculo do momento de inércia do cilindro, obtemos  $0,0045$ .

Disso, decorre que o período de oscilação do cilindro se torna  $\sqrt{\frac{10,7}{0,0045}} = 48,8$  vezes maior adicionando-se a pequena barra transversal. Se, portanto, escolhermos o comprimento do fio de modo a ter uma frequência  $1^{(15)}$  com a barra transversal, a frequência sem ela seria de cerca de  $48,8$ . Isto é quase igual a frequência da corrente alternada.

Tínhamos certeza por isso que o sistema suspenso iria vibrar em seu modo fundamental. No entanto, a fim de determinar o momento de inércia mais acuradamente, o cilindro foi agora colocado no interior da bobina e o comprimento do fio foi aumentado até que a ressonância fosse máxima. Então, a frequência das vibrações livres poderia ser suposta igual àquela da corrente alternada que foi encontrada ser  $46,2$ .

---

de Curie) e descobrir as propriedades de magnetização espontânea e do fenômeno magnetocalórico. Teorias quânticas modernas do ferromagnetismo têm substanciado a hipótese de Weiss do campo molecular como uma primeira aproximação. [70, p. 243]

<sup>(15)</sup>[N. A. 3] Por frequência sempre nos referimos ao número de oscilações completas em um segundo.

Depois disso, o arranjo foi removido da bobina e a barra transversal fixada a ele. Encontramos, então, a frequência 1,14. Desses números, deduzimos

$$I = 10,7 \left( \frac{1,14}{46,2} \right)^2 = 0,0065.$$

Após esses preparativos, verificou-se que o Efeito II, i.e., a oscilação causada pelos polos permanentes no cilindro, não tinha

[pág. 705]

importância. O desvio duplo manteve-se inalterado quando a posição do eixo da bobina em relação à linha vertical foi alterada por meio dos parafusos do pé, uma alteração que deu origem a campos alternantes horizontais.

O Efeito III, entretanto, o qual foi causado pela ação que os campos magnéticos estacionários podem exercer nos polos alternantes em função de suas posições excêntricas, pôde facilmente ser observado. O desvio duplo modifica imediatamente quando um ímã permanente é trazido para perto da bobina. A influência do magnetismo terrestre também foi aparente. Quando isso não é compensado, obtivemos, no caso da ressonância, uma ampliação da imagem na escala de até 3 *cm* a uma distância da escala de 45 *cm*. Em todos os experimentos posteriores, o campo terrestre foi, portanto, compensado e as medições necessárias para isto sendo feitas com um indutor terrestre e um galvanômetro balístico.<sup>(16)</sup> As componentes horizontal e vertical do campo terrestre foram compensadas separadamente por meio de aros de cerca de 1, *m* de diâmetro, no qual o fio de cobre foi enrolado. A corrente foi tomada a partir de células de armazenamento e um amperímetro de precisão da SIEMENS AND HALSKE serviram para o controle contínuo de seu vigor.

Pôde-se testar se a compensação foi obtida girando-se a extremidade superior do fio suspenso. A amplitude das oscilações modificou-se, enquanto o magnetismo terrestre ainda estava agindo no ferro magnetizado pela corrente alternada. Após a compensação, no entanto, esta sensibilidade azimutal do efeito desapareceu. Após tudo, lá permaneceu um desvio duplo bem marcado de 4,5 *mm*.

Agora tínhamos que ter certeza que isso era realmente o efeito que procurávamos. Para isso, primeiro aproveitamo-nos da circunstância que o torque agente deve diferir da corrente e da magnetização um quarto de um período em fase. Trouxemos um ímã permanente para perto da bobina, desse modo, evocando o efeito III e acrescentando ao torque  $B_1 \cos \omega t$ , com o qual estamos preocupados, um novo, que tem a mesma fase ou a fase oposta à magnetização e, portanto, difere de  $B_1 \cos \omega t$  um quarto de um período em fase. Qualquer que seja o sinal deste torque adicional, a amplitude do torque resultante deve tornar-se

<sup>(16)</sup>[N. T.] O galvanômetro balístico é um instrumento desenvolvido

(...) para defletir sua agulha indicadora (ou espelho) de uma maneira proporcional ao total de carga que atravessa sua bobina móvel, ou [proporcional] a um pulso de voltagem de curta duração. Qualquer galvanômetro convencional também pode ser empregado como um do tipo balístico, mas este tem um torque menor e uma inércia maior na bobina. [71]

Já o indutor terrestre, é um instrumento que mede a inclinação magnética por meio da corrente elétrica induzida em uma bobina.

maior que  $B_1$ . Encontramos, de fato, que a ampliação da imagem sempre aumentou quando trouxemos um ímã para perto da bobina.

Além disso, a teoria requer que a magnitude do efeito dependa da intensidade do campo alternante da mesma forma que a magnetização. Isso foi igualmente confirmado por experimento.

Finalmente, iremos comparar a magnitude observada do efeito

[pág. 706]

com a teórica. Se pegarmos 1200 para a magnetização alcançada pelo ferro, obtemos (o volume do cilindro sendo  $0,16\text{ cm}^3$ )  $M_s = 192$ . Por observação direta das oscilações no campo alternante, encontramos

$$K = 0,533.$$

Como

$$I = 0,0065,$$

segue-se de (16) que

$$|\theta| = 0,0036.$$

Para uma distância da escala de  $45\text{ cm}$ , isto fornece para o desvio duplo  $4|\theta| \cdot 45 = 0,65$ . Como já foi dito, encontramos  $0,45$  pelo nosso experimento.

Quanto a esta diferença, devemos observar que o valor teórico é um limite superior e que o magnetismo não altera seu sinal instantaneamente.

Por conta da influência de desmagnetização dos polos livres, o campo na bobina deve ser bastante forte se, na sua reversão, a magnetização está para tomar imediatamente um valor constante na nova direção.

## §6. *Determinação da fase*

Vimos que o torque ativo difere da magnetização alternante um quarto de um período em fase. Além disso, segue de §3 que, comparando a fase do efeito ( $P_1$ ) com aquela da corrente alternada ( $P_2$ ), estamos aptos para decidir se os elétrons circulando em volta das moléculas de ferro são realmente *negativos*. Tentamos efetuar isso procedendo da seguinte forma.

A lâmpada de filamento único utilizada para a leitura da escala foi conectada com os condutores principais de corrente alternada em paralelo com a bobina que continha o cilindro de ferro. Quando, em seguida, trouxemos um ímã permanente perto da lâmpada, o filamento incandescente foi posto em movimento pela força eletromagnética alternada. Desse modo, além das oscilações devidas as vibrações do espelho, a imagem também apresentou aquelas causadas pelo movimento do filamento.

Ao observar se a adição desta última vibração aumentou ou diminuiu a amplitude da imagem, pudemos comparar a fase  $P_1$  com aquela das novas vibrações. Agora, esta última é determinada pela fase do filamento incandescente e este, por sua vez, depende da fase da corrente nele; enquanto que a diferença entre esta fase e  $P_2$  é determinada pela auto-indução na bobina.

Infelizmente, quando os nossos experimentos foram levados a uma conclusão e um de nós deixou Berlim, descobriu-se que um engano

[pág. 707]

foi cometido na aplicação do método. Então, devemos considerar um fracasso esta parte de nossa investigação. O sinal negativo dos elétrons circulantes é assumido, porém, muito provável pela concordância entre a magnitude do efeito observado e o valor que deduzimos para ela a partir daquela da razão  $\frac{e}{m_e}$  para elétrons negativos.

### §7. *Medições mais acuradas*

As medições até aqui descritas forneceram uma confirmação satisfatória da teoria, mas foram muito carentes em precisão. O campo na bobina era, na prática, muito fraco para causar a reversão súbita da magnetização assumida na teoria. Além disso, o coeficiente de amortecimento,  $\alpha$ , não pôde ser determinado com qualquer acurácia. Ainda, pode surgir a pergunta se a influência do amortecimento é representada corretamente pelo termo  $P\dot{\theta}$  na equação (6).

Por essas razões, modificamos um pouco nosso aparato. A fim de acelerar a reversão da magnetização, ao invés da pequena bobina antiga, utilizamos uma de 62 cm de comprimento (cerca de 100 espiras por cm) cuja amplitude do campo, para uma intensidade efetiva de 1,45 ampere, foi 260 gauss na parte central e, portanto, 130 gauss nas extremidades. A fim de diminuir a influência da desmagnetização dos polos, utilizamos ainda um cilindro de 16 cm de comprimento e 0,17 cm de diâmetro. O espelho agora foi suspenso por um tubo de paredes finas que foi selado à extremidade inferior do cilindro de ferro. Ele somente projetava [o feixe de luz] por baixo da extremidade inferior da bobina. A fim de evitar uma determinação do coeficiente de amortecimento e suposições sobre a lei de amortecimento, uma série de experimentos foram feitos nos quais, para um comprimento definitivo do fio, a amplitude  $|\theta|$  foi determinada para diferentes frequências da corrente alternada, de modo que uma “curva de ressonância” pôde ser traçada.

A corrente alternada foi fornecida por um gerador localizado no porão do prédio e movido pela corrente de uma bateria de células de armazenamento. O aparato na sala de trabalho compreendeu uma resistência variável conectada em paralelo às espiras do campo dos ímãs. Variando esta resistência, podemos modificar com certos limites a corrente de excitação no motor e, assim, o número de suas revoluções e a frequência da corrente alternada induzida. A corrente que atravessou a resistência variável foi controlada por um amperímetro. Quando todas as outras coisas foram mantidas constantes, a frequência da corrente alternada foi uma função da

[pág. 708]

intensidade da corrente na resistência variável. Além disso, usamos um medidor de frequência de ressonância da HARTMANN AND BRAUN, com o qual pudemos acuradamente determinar frequências definidas (45; 45,5; 46 até 55). As frequências intermediárias foram interpoladas por meio do amperímetro. A amplitude das vibrações do cilindro foram medidas do mesmo modo que no antigo experimento. Entretanto, a fim de aumentar a precisão, agora tomamos uma distância da escala de 145 cm.

Na fig. 2, os resultados foram plotados graficamente.<sup>(17)</sup> Os números

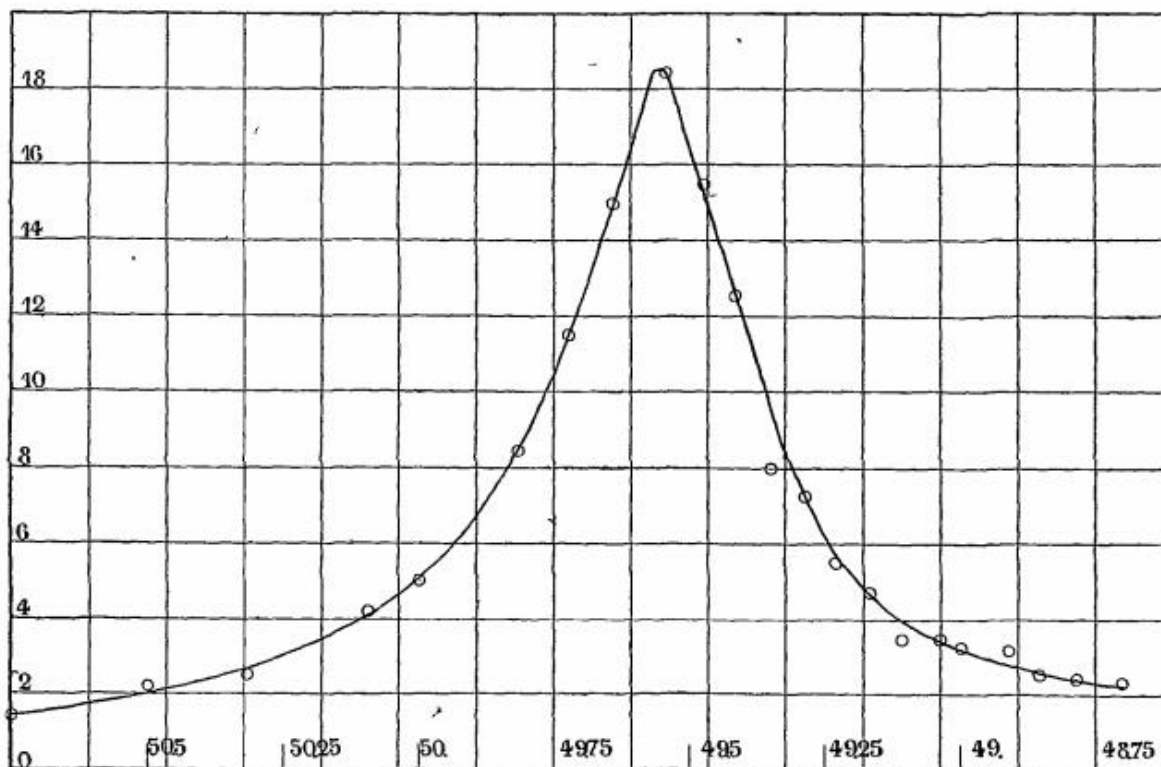


Fig. 2.

[pág. 709]

no eixo horizontal<sup>(18)</sup> dão as frequências da corrente alternada, aqueles no eixo vertical dão 10 vezes o desvio duplo em centímetros.

Para o cálculo, usamos, toda vez, dois pontos a mesma altura combinados com a ordenada do ponto mais alto da curva. Se, por causa da brevidade, colocarmos

$$\frac{4\lambda\vec{M}_s}{\pi I} = \vec{\mu},$$

segue-se de (15) que

$$\frac{\mu}{|\theta|} = \sqrt{\frac{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}{\omega^2} + 4\kappa^2}.$$

<sup>(17)</sup>[N.T] Dispomos o tamanho da figura pouco menor da proporção original.

<sup>(18)</sup>[N. A. 4] Se a figura for trazida para a posição correta por uma rotação de 90°.

Agora, se  $\omega_1 (> \omega_0)$  e  $\omega_2 (< \omega_0)$  são os dois valores correspondentes à mesma amplitude  $|\theta|$ , temos as equações

$$\frac{\mu}{|\theta|} = \sqrt{\frac{(\omega_1^2 - \omega_0^2)^2}{\omega_1^2} + 4\kappa^2},$$

$$\text{e } \frac{\mu}{|\theta|} = \sqrt{\frac{(\omega_0^2 - \omega_2^2)^2}{\omega_2^2} + 4\kappa^2}.$$

Por eliminação de  $\omega_0$  e  $\kappa$  a partir dessas e por

$$\frac{\mu}{|\theta|_m} = 2\kappa,$$

encontramos

$$\frac{\mu^2}{|\theta|^2} - \frac{\mu^2}{|\theta|_m^2} = (\omega_1 - \omega_2)^2.$$

Seja  $v$  a diferença na frequência de dois pontos escolhidos, de modo que  $\omega_1 - \omega_2 = 4\pi v$ , e seja

$$\frac{|\theta|}{|\theta|_m} = b.$$

Então, encontramos, após introduzir o valor de  $\mu$

$$\lambda = \pi^2 \frac{I}{M_s} |\theta|_m \cdot v \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}. \tag{17}$$

Quando a curva de ressonância foi traçada, (17) fornece um valor de  $\lambda$  para cada ordenada  $|\theta|$ . Se este valor ou o montante equivalente  $v \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$  é constante, fica provado que a influência do amortecimento pode realmente ser representada por um termo linear na equação do movimento.

A tabela a seguir contém os valores de  $v$  e  $b$  tirados do diagrama e os valores de  $v \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$  deduzidos deles.

[pág. 710]

Ordenadas	$v$	$b$	$\sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$	$v \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$
15	0,0911	0,812	1,32	0,120
12	0,152	0,649	0,853	0,130
9	0,221	0,488	0,560	0,124
7	0,293	0,380	0,413	0,121
5	0,403	0,271	0,280	0,114
4	0,489	0,217	0,222	0,108
3	0,618	0,163	0,165	0,0957

A última coluna mostra que para o maior desvio, não menos que  $7\text{ mm}$ , a curva concorda satisfatoriamente com a teoria, com  $v\sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$  sendo suficientemente constante. Se passarmos para a menor ordenada, essa quantidade parece diminuir muito rapidamente. Deve-se observar, no entanto, que as ordenadas pequenas não podem ser medidas com precisão suficiente. Usaremos, portanto, somente as 4 primeiras. A média dos números deduzida a partir deles é

$$v\sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}} = 0,124.$$

Além disso, conclui-se a partir da curva que

$$|\theta|_m = \frac{1,85}{145,4} = 0,320 \cdot 10^{-2}.$$

O momento de inércia do sistema vibrante foi determinado medindo a mudança da frequência produzida pela adição de um pequeno momento de inércia, o qual é acuradamente conhecido.

Encontramos<sup>(19)</sup> para ele

$$I = 0,0126.$$

Se agora tomarmos 1300 para a magnetização (calculada a partir da curva de histerese do material e as constantes da bobina), encontramos para o momento magnético do cilindro

$$M_s = 470.$$

Com esses números, a equação (17) leva ao valor

$$[\text{pág. 711}]$$

$$\lambda = 1,1 \cdot 10^{-7},$$

que concorda muito bem com o valor teórico  $1,13 \cdot 10^{-7}$ .

Devemos observar, entretanto, que não podemos atribuir às nossas medições precisão [sic] superior do que 10 %.<sup>(20)</sup>

Parece-nos que, dentro desses limites, as conclusões teóricas foram suficientemente confirmadas pelas nossas observações.

Os experimentos foram realizados no “*Physikalisch-Technische Reichsanstalt*”. Queremos expressar nossos agradecimentos pelo aparato gentilmente colocado à nossa disposição.

<sup>(19)</sup>[N. A. 5] Pode-se mencionar aqui que, assumindo uma forma puramente cilíndrica, calculamos para o momento de inércia do cilindro, sem o tubo de vidro e o pequeno espelho,  $I = 0,0102$ .

<sup>(20)</sup>[N. T.] Nota-se que se referiam à margem de tolerância, ou *erro*, e não à *precisão*. Verifica-se isto quando se lê que “O experimento forneceu verificação detalhada da teoria dentro margem de erro (por volta de 10 %)” [17, p. 88].

## Referências

- [1] Albert Einstein e Wander Johannes De Haas. Experimenteller nachweis der ampèreschen molekularströme. *Deutsche Physikalische Gesellschaft, Verhandlungen*, 17:152–170, 1915.
- [2] André Koch Torres Assis e João Paulo Martins de Castro Chaib. *Eletrodinâmica de Ampère*. Editora da Unicamp, Campinas, 2011.
- [3] Albert Einstein. Experimenteller nachweis der ampèreschen molekularströme. *Die Naturwissenschaften*, 3:237–238, 1915.
- [4] Albert Einstein e Wander Johannes De Haas. Proefondervindelijk bewijs voor het bestaan der moleculaire stromen van Ampère. *Natuurkundig Afdeeling, Verslagen van de Gewone Vergaderingen*, 23:1449–1464, 1915.
- [5] Albert Einstein. Ein einfaches experiment zum nachweis der ampèreschen molekularströme. *Deutsche Physikalische Gesellschaft, Verhandlungen*, 18:173–177, 1916.
- [6] Albert Van Helden. Biographies: Wander Johannes de Haas. Em: *A History of Science in the Netherlands* [73], pp. 454–456.
- [7] Albert Einstein e Wander Johannes De Haas. Experimental proof of the existence of Ampère’s molecular currents. *KNAW, Proceedings*, 18 I:696–711, 1915. <http://www.dwc.knaw.nl/DL/publications/PU00012546.pdf>, 21 set. 2014. Tradução para a língua inglesa do artigo “Proefondervindelijk bewijs voor het bestaan der moleculaire stromen van Ampère”.
- [8] Albert Einstein. *Conclusions drawn from the phenomena of capillarity*, chapter 1. Volume 2 of Stachel [72], 1901. <http://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol2-trans>, acessado em 31 out. 2015.
- [9] Albert Einstein. *A new determination of molecular dimensions*, chapter 15, pages 104–122. Volume 2 of Stachel [72], 1905. <http://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol2-trans>, acessado em 31 out. 2015.
- [10] Albert Einstein. *On a heuristic point of view concerning the production and transformation of light*, chapter 14, pp. 86–103. Volume 2 of Stachel [72], 1905. <http://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol2-trans>, acessado em 31 out. 2015.
- [11] Albert Einstein. *On the movement of small particles suspended in stationary liquids required by the molecular-kinetic theory of heat*, chapter 16, pages 123–134. Volume 2 of Stachel [72], 1905. <http://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol2-trans>, acessado em 31 out. 2015.
- [12] Albert Einstein. *On the electrodynamics of moving bodies*, chapter 23, pages 140–171. Volume 2 of Stachel [72], 1905. <http://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol2-trans>, acessado em 31 out. 2015.
- [13] Albert Einstein. On the limit of validity of the law of thermodynamic equilibrium and on the possibility of a new determination of the elementary quanta. Em: Stachel [72], chapter 39, pp. 225–228. <http://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol2-trans>, acessado em 31 out. 2015.

- [14] Alice Calaprice e Trevor Lipscombe. *Albert Einstein*. Greenwood Press, Westport, 2005.
- [15] Albert Einstein. To Hendrik A. Lorentz. Em: Schulmann et al. [75], pp. 59–63. <http://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol8-trans>, acessado em 31 out. 2015.
- [16] Albert Einstein. *To Michele Besso*, pp. 68–69. Volume 8 of Schulmann et al. [75], 1915. <http://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol8-trans>, acessado em 31 out. 2015.
- [17] Albert Einstein. To Heinrich Zangger. Em: Schulmann et al. [75]. <http://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol8-trans>, acessado em 31 out. 2015.
- [18] Viktor Ya. Frenkel. On the history of Einstein-de Haas effect. *Soviet Physics Uspekhi*, 1979.
- [19] C. J. Gorter. Levensbericht W.J. de Haas, 1959–1960.
- [20] J. A. Prins. De Haas, Wander Johannes. Em: Charles C. Gillispie, editor, *New Dictionary of Scientific Biography*, volume 5, p. 600. Charles Scribner's Sons, New York, 1972.
- [21] Unknow. International solvay institutes, 2015.
- [22] Wander Johannes De Haas e H. Kamerlingh Onnes. Isotherms of diatomic substances and of their binary mixtures. xii. the compressibility of hydrogen vapour at, and below the boiling point. *KNAW, Proceedings*, 15 I:405–417, 1912. <http://www.dwc.knaw.nl/DL/publications/PU00012986.pdf>, acessado em 31 out. 2015.
- [23] Wander Johannes de Haas. The effect of temperature and transverse magnetisation on the continuous-current resistance of crystallized antimony. *KNAW, Proceedings*, 16 II:1110–1123, 1914. <http://www.dwc.knaw.nl/DL/publications/PU00012879.pdf>, acessado em 31 out. 2015.
- [24] Wander Johannes de Haas. Further experiments on the moment of momentum existing in a magnet. *KNAW, Proceedings*, 18 II:1281–1299, 1916.
- [25] Wander Johannes De Haas e G. L. De Haas-Lorentz. An experiment of Maxwell and Ampère's molecular currents. *KNAW, Proceedings*, 19 I:248–255, 1917.
- [26] Wander Johannes de Haas. On the diffraction phenomenon caused by a great number of irregularly distributed apertures or opaque particles. *KNAW, Proceedings*, 20 II:1278–1288, 1918.
- [27] Wander Johannes De Haas, G. J. Sizoo, e H. Kamerlingh Onnes. On the magnetic disturbance of the supraconductivity with mercury i. *KNAW, Proceedings*, 29:233–249, 1926.
- [28] Wander Johannes de Haas, E. van Aubel, e J. Voogd. New super-conductors. *KNAW, Proceedings*, 32:218–225, 1929.
- [29] Wander Johannes De Haas, Hans A. Kramers, e J. Becquerel. Experimental verification of the theory of the paramagnetic rotatory polarisation in the crystals of xenotime. *KNAW, Proceedings*, 32:1206–1211, 1929.
- [30] Wander Johannes de Haas e P. M. van Alphen. The testing of monocrystalline wires. *KNAW, Proceedings*, 33:128–129, 1930.

- [31] Schubnikow L. e Wander Johannes de Haas. Magnetische widerstandsvergrößerung in einkristallen von wismut bei tiefen temperaturen. *KNAW, Proceedings*, 33:130–133, 1930.
- [32] A. M. Ampère. Mémoire présenté à l'académie royale des sciences, le 2 octobre 1820, ou se trouve compris résumé de ce qui a été lu à la même académie les 18 et 25 septembre 1820, sur les effets des courans électriques. *Annales de Chimie et de Physique*, 15:59–76, 1820. <http://www.ampere.cnrs.fr/>, acessado em set. 2015.
- [33] James Clerk Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism*, volume 2. Oxford, London, 1881.
- [34] Samuel Jackson Barnett. The theory of magnetization by rotation. *Science*, 42:459–460, 1915.
- [35] Richard Chace Tolman e Thomas Dale Stewart. The electromotive force produced by the acceleration of metals. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, 2:189–192, Mar 1916.
- [36] Richard Chace Tolman e Thomas Dale Stewart. The mass of the electric carrier in copper, silver and aluminium. *Physical Review*, IX:164–167, 1917.
- [37] Joseph John Thomson. Cathode rays. *Philosophical Magazine*, 14:293–316, 1897.
- [38] Peter Galison. Theoretical predispositions in experimental physics: Einstein and the gyromagnetic experiments, 1915-1925. *Historical Studies in the Physical Sciences*, 12(2):285–323, 1982.
- [39] H.A. Lorentz. *The Theory of Electrons and Its Applications to the Phenomena of Light and Radiant Heat*. Mathematischen Wissenschaften. Teubner/G.E. Stechert, Leipzig/New York, 2 edition, 1916.
- [40] Albert Einstein. Zur elektrodynamik bewegter körper. *Annalen der physik*, 322(10):891–921, 1905.
- [41] Walter Kaufmann. Über die konstitution des elektrons. *Annalen der Physik*, 324(3):487–553, 1906.
- [42] Owen Willians Richardson. A mechanical effect accompanying magnetization. *Physical Review*, 1908.
- [43] Samuel Jackson Barnett. The magnetization of iron, nickel, and cobalt by rotation and the nature of the magnetic molecule. *Physical Review*, pp. 178–181, 1917.
- [44] A. Schuster. A critical examination of the possible causes of terrestrial magnetism. *Physical Society of London, Proceedings*, 24:121–137, 1912.
- [45] J. P. M. C. Chaib e A. K. T. Assis. Ampère e a origem do magnetismo terrestre. Em: Programa de Pós-graduação em Ensino e História em Ciências da Terra, editor, *I Simpósio de pesquisa em ensino e história em ciências da Terra*, pp. 315–320, Campinas, 2007. IGE-Unicamp.
- [46] Samuel Jackson Barnett. On magnetization by angular acceleration. *Science*, 30, 1909.
- [47] Albert Einstein e Wander Johannes De Haas. Comment on our paper. Em: Kox et al. [74].
- [48] Editor-News. Experimental demonstration of an ampere molecular current in a nearly perfect conductor. *Nature*, 93, 1914.
- [49] Heike Kamerlingh Onnes. Investigations into the properties of substances at low temperatures, which have led, amongst other things, to the preparation of liquid helium, 1913.

- [50] Heike Kamerlingh Onnes. Further experiments with liquid helium. j. the imitation of an ampère molecular current or a permanent magnet by means of a supra-conductor. (cont.). *KNAW, Proceedings*, 17:278–283, 1914.
- [51] Hendrik Antoon Lorentz. From Hendrik A. Lorentz. Em: Schulmann et al. [75], pp. 218–221. <http://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol8-trans>, acessado em 31 out. 2015.
- [52] André Koch Torres Assis e João Paulo Martins de Castro Chaib. *Ampère's Electrodynamics*. Apeiron, C. Roy Keys Incorporated, Montreal, 2015. <http://www.ifi.unicamp.br/~assis/Amperes-Electrodynamics.pdf>, acesso em 01 fev. 2016.
- [53] Joseph John Thomson. Carriers of negative eletricity, 1906.
- [54] N. Bohr. On the constitution of atoms and molecules. *Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1913.
- [55] Peter J. Mohr, Barry N. Taylor, e David B. Newell. Codata recommended values of the fundamental physical constants: 2010. *Rev. Mod. Phys.*, 84:1527–1605, Nov 2012. <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.84.1527>, acessado em 29 ago. 2015.
- [56] Albert Einstein. To Fritz Weishut. Em: Schulmann et al. [75], pp. 89–90. <http://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol8-trans>, acessado em 31 out. 2015.
- [57] Albert Einstein. To Geertruida de Haas. Em: Schulmann et al. [75]. <http://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol8-trans>, acessado em 31 out. 2015.
- [58] John Quincy Stewart. On the moment of momentum accompanying magnetic moment in iron and nickel. *Physical Review*, 1918.
- [59] Emil Beck. Zum experimentellen nachweis der ampèreschen molekularströme. *Annalen der Physik*, 1919.
- [60] Gustaf Arvidsson. Eine untersuchung über die ampèreschen molekularströme nach der methode von A. Einstein and W. J. de haas. *Physikalische Zeitschrift*, 1920.
- [61] Albert Einstein. To Paul Ehrenfest. Em: Diana Kormos Buchwald, Robert Schulmann, József Illy, Daniel J. Kennefick, and Tilman Sauer, editors, *The Collected Papers of Albert Einstein*, volume 9, pp. 9–10. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1919. <http://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol9-trans>, acessado em 31 out. 2015.
- [62] Gomes, G. G. and Pietrocola, M. *Revista Brasileira de Ensino de Fisica* **33**(2), 2604 (2011).
- [63] Hans C Ohanian. *Einstein's mistakes*. WW Norton & Company, New York, London, 2009.
- [64] Thomas S. Kuhn. The function of measurement in modern physical science. *Isis*, 52(2):161–193, 1961.
- [65] A. Pais. Einstein and the quantum theory. *Rev. Mod. Phys.*, 51:863–914, Oct 1979.
- [66] A. K. T. Assis, K. H. Wiederkehr, e G. Wolfschmidt. *O Modelo Planetário de Weber para o Átomo*. Apeiron, Montreal, 2014. <http://www.ifi.unicamp.br/~assis/Modelo-Planetario-de-Weber.pdf>, acesso em 01 fev. 2016.

- [67] Robert A. Millikan. The electron and the light-quant from the experimental point of view, 1924.
- [68] Douglas Harper. “wich”. *Online Etymology Dictionary*, 2010.
- [69] Herch Moysés Nussenzveig. *Curso de Física Básica*, volume 3. Edgard Blücher, São Paulo, 1997.
- [70] Francis Perrin. Weiss, pierre. Em: Charles C. Gillispie, editor, *New Dictionary of Scientific Biography*, volume 14, pp. 243–247. Charles Scribner’s Sons, New York, 1976.
- [71] Enciclopædia Britannica. Ballistic galvanometer, 2015. <http://global.britannica.com/technology/ballistic-galvanometer>, acessado em 27 set. 2015.
- [72] John Stachel, editor. *The Collected Papers of Albert Einstein*, volume 2. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1987. <http://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol2-trans>, acessado em 31 out. 2015.
- [73] Klass Van Berkel, Albert Van Helden, e Lodewijk Palm. *A History of Science in the Netherlands: survey, themes and reference*. Brill, Leiden, Boston, Köln, 1999.
- [74] A. J. Kox, Martin J. Klein, e Robert Schulmann, editors. *The Collected Papers of Albert Einstein: The Berlin years: Writings, 1914–1917*, volume 6. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1997. <http://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol6-trans> acessado em 31 out. 2015.
- [75] Robert Schulmann, A. J. Kox, Michel Janssen, e József Illy, editors. *The Collected Papers of Albert Einstein: The Berlin years: Correspondence, 1914–1918*, volume 8. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1998. <http://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol8-trans>, acessado em 31 out. 2015.

# Simulations of the Formation of STIPs (Systems of Tightly Packed Inner Planets)

PROJECT OF: ROSSETTO, PEDRO H.B.\*  
UNDER SUPERVISION OF: PROF. M. DUNCAN

September 4, 2017

## Abstract

*This paper investigates the process of migration of planets of masses ranging from 1 to 20  $M_{\oplus}$  in the protoplanetary disc (Type I Migration) and how it influences the architecture of Planetary Systems. The integrator SyMBA (Duncan et al., 1998) was used to generate data for analysis.*

Keywords: Planet formation, planet migration, Type I Migration, STIP, computer simulations.

## 1 Introduction

Planets of masses ranging from 1 to 20  $M_{\oplus}$  can generate a disturbance in the protoplanetary disk that modifies the dynamics of the planet itself but does not modify greatly the structure of the disc. This modification can be divided into two torques: one due to the spiral wave created by the planet in the disc and another caused by the material near to the planet's orbit enclosed in the horseshoe region around the planet (Baruteau et al. (2014), see Figure 1). Then, the planet start to migrate in a process called *Type I Migration*.

The spiral wave torque, also referred as the Lindblad torque, is typically negative causing the planet to migrate inwards. A formula that with a good agreement describes this kind of torque in a adiabatic gas disk was given by Paardekooper et al. (2010):

$$\gamma\Gamma/\Gamma_0 = -(2.5 + 1.7\beta - 0.1\alpha) \quad (1)$$

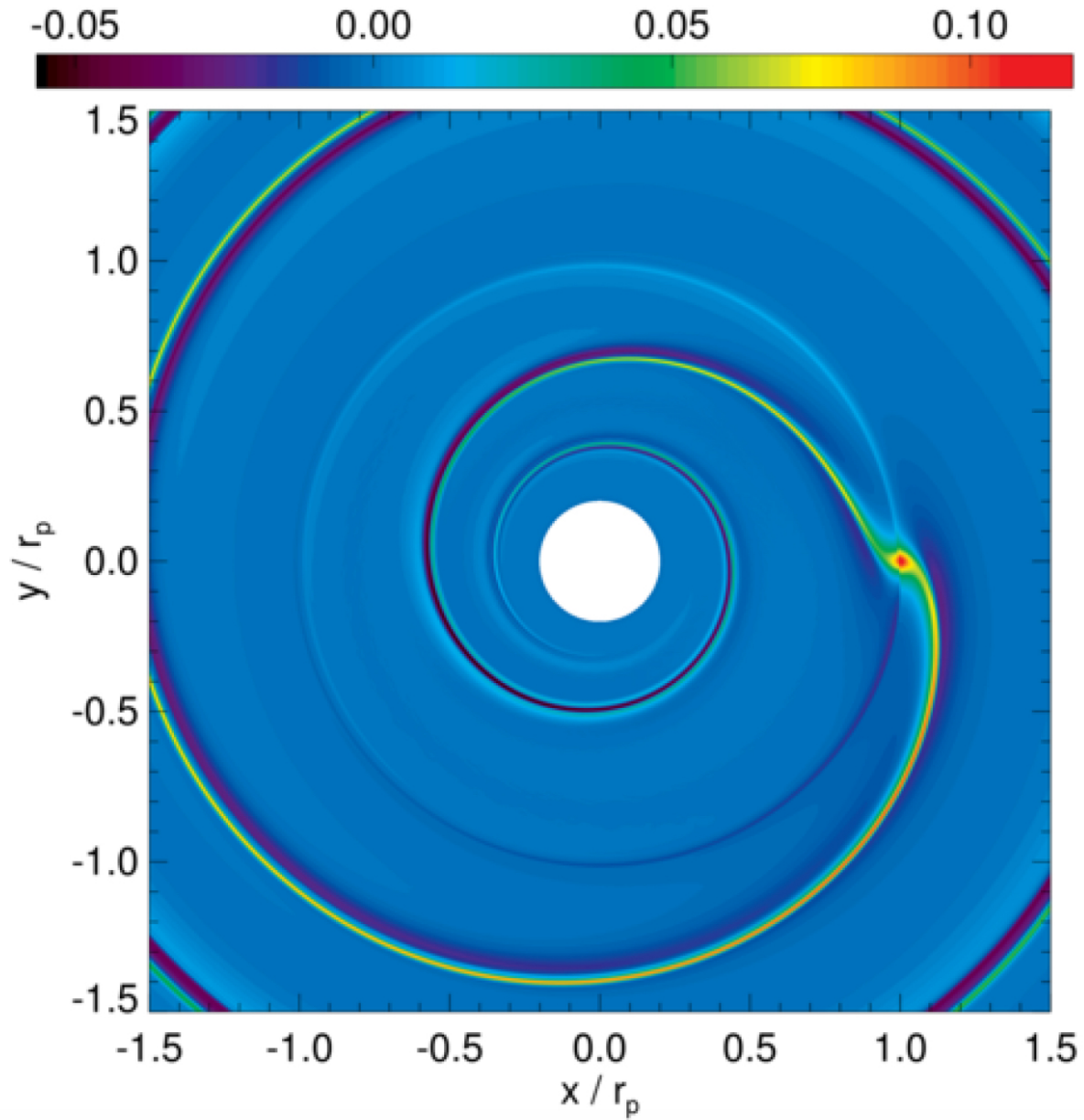
where  $\gamma$  is the ratio of specific heats and we assume that:

$$\Sigma = \Sigma_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-\alpha}$$

with  $\Sigma$  being the surface density and:

---

\*pedrohenriquerossetto@gmail.com



**Figure 1:** Disturbance created by a planet in the disk. Figure from Baruteau et al., 2014. The red dot shows the planet's location, at a distance  $r_p$  from the central star.

$$T = T_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-\beta}$$

with  $T$  being the temperature.  $\Gamma_0$  is the normalization factor given by:

$$\Gamma_0 = \frac{q^2}{h^2} \Sigma a^4 \Omega^2$$

where:  $q$  is the planet mass in units of the mass of its star,  $\Sigma$  the surface density of the gas disk at the planet location,  $a$  is the semimajor axis of the planet and  $\Omega$  is its frequency; and,  $h$  the scale height of the disc in units of  $a$ .

It is already known that the Lindblad torque sets a really short time scale for planet migration and this is a challenge to the models since planets are observed to be common in solar systems. This problem has been approached by the addition of the corotation torque. This torque is exerted by the part of the disk inside the horseshoe region of the planet and it is normally directed outwards, balancing in some situations the Lindblad torque.

*Paardekooper et al.* (2010) presented a formula for the non-linear corotation torque ( $\Gamma_{c,HS}$ ). It is:

$$\gamma \Gamma_{c,HS} / \Gamma_0 = 1.1 \left( \frac{3}{2} - \alpha \right) + 7.9 \frac{\xi}{\gamma} \quad (2)$$

where  $\xi = \beta - (\gamma - 1)\alpha$ . This formula is used for a non-saturated corotation torque, in an adiabatic disk.

The total torque that acts in a low-mass planet in a protoplanetary disk is therefore the sum of equations (1) and (2):

$$\Gamma = \Gamma_L + \Gamma_{c,HS}$$

that is:

$$\gamma \Gamma / \Gamma_0 = -0.85 - 1.7\beta - \alpha + 7.9 \frac{\xi}{\gamma} \quad (3)$$

A similar formula was developed in the same paper by *Paardekooper* for isothermal disks, it is:

$$\Gamma / \Gamma_0 = -0.02 - 3.578\alpha \quad (4)$$

## 2 Methodology

The simulations here present were run in SyMBA (*Duncan et al., 1998*). The method of implementation of Type I Migration was through time scales. The adopted convention for the time scale is:

$$\tau = -\frac{a}{da/dt}$$

Considering an adiabatic disk, equation (3) yields the time scale:

$$\tau_{adi} = \gamma \frac{\tau_0}{c_a} \quad (5)$$

where  $c_a = 0.85 + 1.7\beta + \alpha - 7.9\xi/\gamma$  and  $\tau_0$  being giving by:

$$\tau_0 = \frac{1}{2} \frac{h^2}{q} \frac{M}{\Sigma_P a^2} \Omega_P^{-1} \quad (6)$$

Considering an isothermal disk, equation (4) yields the time scale:

$$\tau_{iso} = \frac{\tau_0}{c_a} \quad (7)$$

where  $c_a = 0.02 + 3.578\alpha$  and  $\tau_0$  is given by equation (6).

### 3 Tests and Simulations

Several simulations were run in order to test whether the code agrees with the behaviour proposed by the formulas (3) and (4). Some of these tests are shown in the subsections below.

After the tests were realised, it was observed that it was possible to generate a planetary trap for some specific values of  $\alpha$  just by imposing the condition that the disc in a certain location changes its thermodynamical characteristics, i.e., goes from adiabatic in the inner region to isothermal in the outer region. Some of the simulations done exploiting this are also presented below.

All tests and simulations had gas surface density at 1 AU equal to  $3.9 \cdot 10^4 \text{ g/cm}^2$ , which is the value used in what is called the Minimum Mass Solar Nebula.

#### 3.1 Tests of the Code

The test simulations, from now on 'tests', were done with a wide range of planet masses and orbital radii. All tests were run until  $10^5$  years and had gas disk time scale equals to  $10^7$  years.

Equation (6) dictates how the time scale can possibly vary with  $a$ . In our models some assumptions were made on how certain quantities depends on  $a$ , such as:

$$H = H_0 a^{5/4}$$

Which led to the result:

$$\Sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \rho dz = \sqrt{\pi} \rho H$$

Since  $\Sigma = \Sigma_0 a^{-\alpha}$ , we have that:

$$\rho = \rho_0 a^{-\delta}$$

where  $\rho_0 = \Sigma_0 / (H_0 \sqrt{\pi})$  and  $\delta = \alpha + 5/4$ .

Now it is possible to check how  $\tau_0$  depends on  $a$ . According to the relationships stated above and with formula (6):

$$\tau_0 \propto \left(\frac{a^{5/4}}{a}\right)^2 \frac{1}{a^{-\alpha}a^2} a^{3/2} \propto a^\alpha$$

That means that if  $\alpha = 0$ ,  $\tau_0$  yields the analytical answer that the migration is exponential. This is:

$$a(t) = a_0 e^{-t/\tau}$$

It is necessary to notice that this calculation was done ignoring the fact that the gas disk decays exponentially. This assumption is reasonable for situations like the ones presented in the tests because the whole simulation was run for  $10^5$  years and the gas disk decay time was  $10^7$  years.

Then in order to check that the simulations were done correctly it sufficient to check if at a certain time the relationship below holds:

$$\tau = t \left( \ln\left(\frac{a_0}{a(t)}\right) \right)^{-1} \tag{8}$$

Figure 2 shows the graphic results for the test where the gas was completely isothermal and Figure 3 for when it was completely adiabatic. Tables 1 and 2 show the data produced by the simulations as well as the value of  $\tau$  calculated by formula (8) (i.e., value of  $\tau$  in the simulations) and by formulas (5) and (7) (i.e., analytical value of  $\tau$ ).

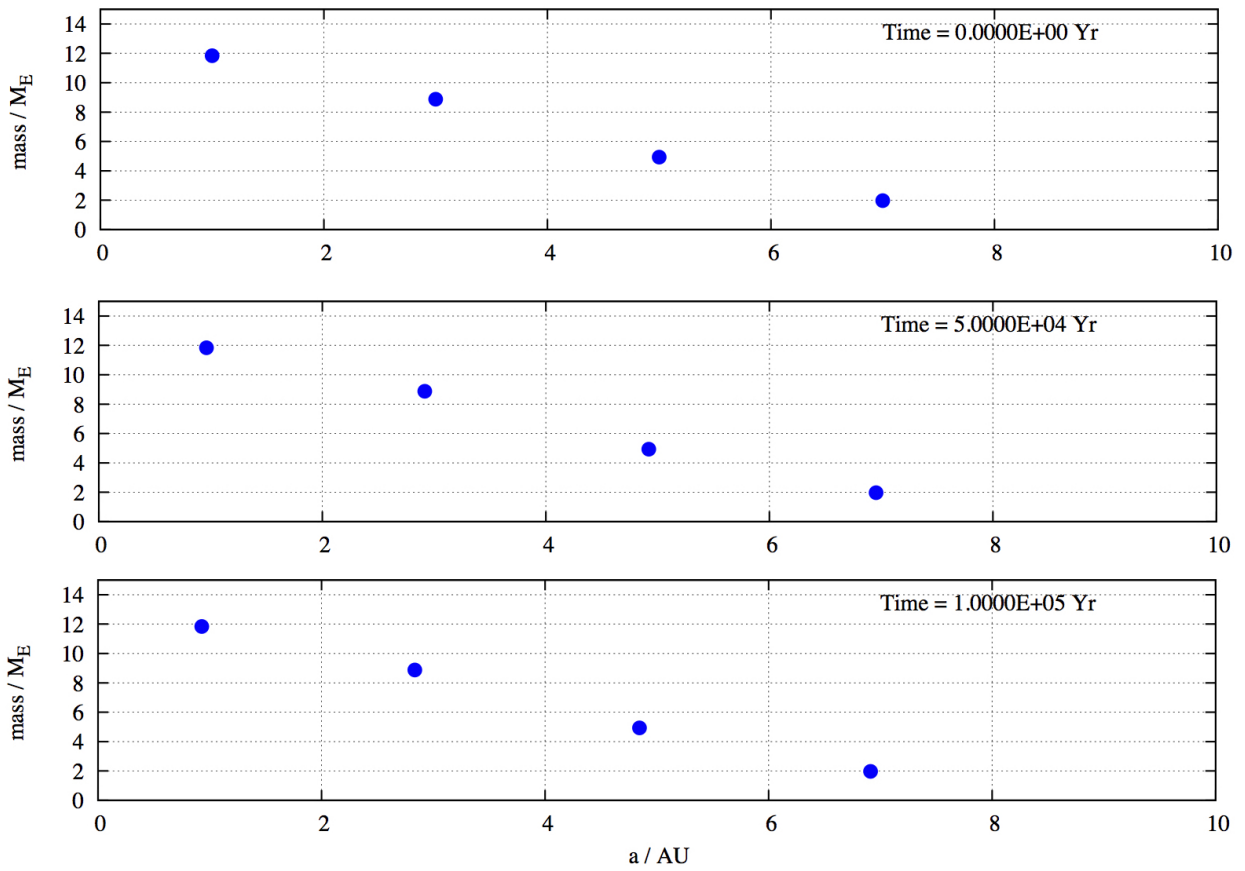
**Table 1:** Data of the isothermal gas disk test and the calculated values of  $\tau$ . The value of  $a$  was analyzed at the time  $10^5$  yrs in order to get a considerable migration of all planets from their original positions.

Planet	Initial $a$	$a$ after $10^5$ yrs	Simulation $\tau$	Analytical $\tau$
1	1.00E+00	9.28E-01	1.33E+06	1.32E+06
2	3.00E+00	2.83E+00	1.76E+06	1.76E+06
3	5.00E+00	4.84E+00	3.17E+06	3.17E+06
4	7.00E+00	6.91E+00	7.92E+06	7.93E+06

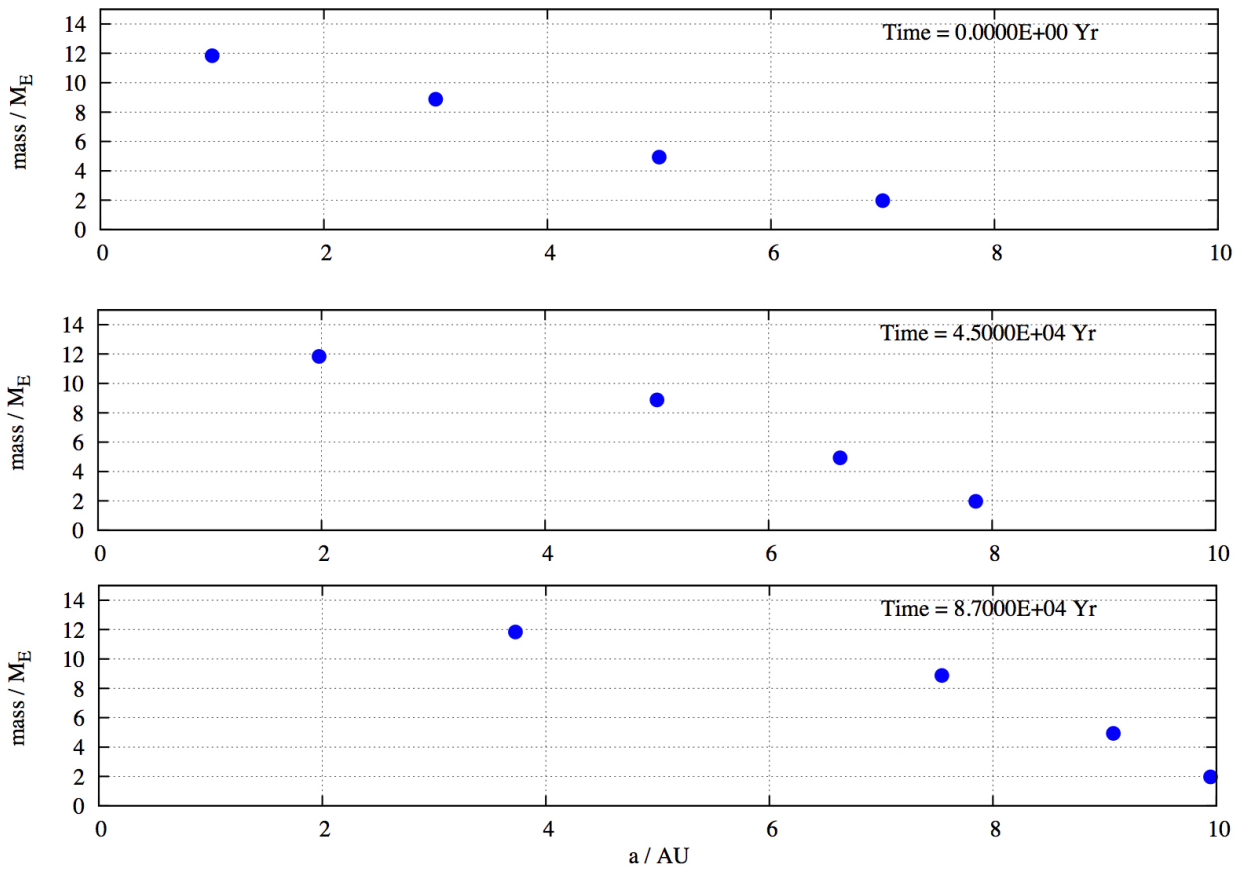
**Table 2:** Data of the adiabatic gas disk test and the calculated values of  $\tau$ .

Planet	Initial $a$	$a$ after $10^3$ yrs	Simulation $\tau$	Analytical $\tau$
1	1.00E+00	1.02E+00	-6.59E+04	-6.57E+04
2	3.00E+00	3.03E+00	-8.86E+04	-8.76E+04
3	5.00E+00	5.03E+00	-1.67E+05	-1.58E+05
4	7.00E+00	7.02E+00	-4.09E+05	-3.94E+05

The value of  $\tau$  calculated analytically by formulas (5) and (7) was the same as, or close to, the value obtained by the simulations. Therefore, we can assume that the code is correct.



**Figure 2:** Slight inwards migration of the planets in an isothermal gas disk with  $\alpha = 0$ . On the x-axis is the semimajor axis  $a$  in AU of each planet and on the y-axis their masses in  $M_{\oplus}$ .

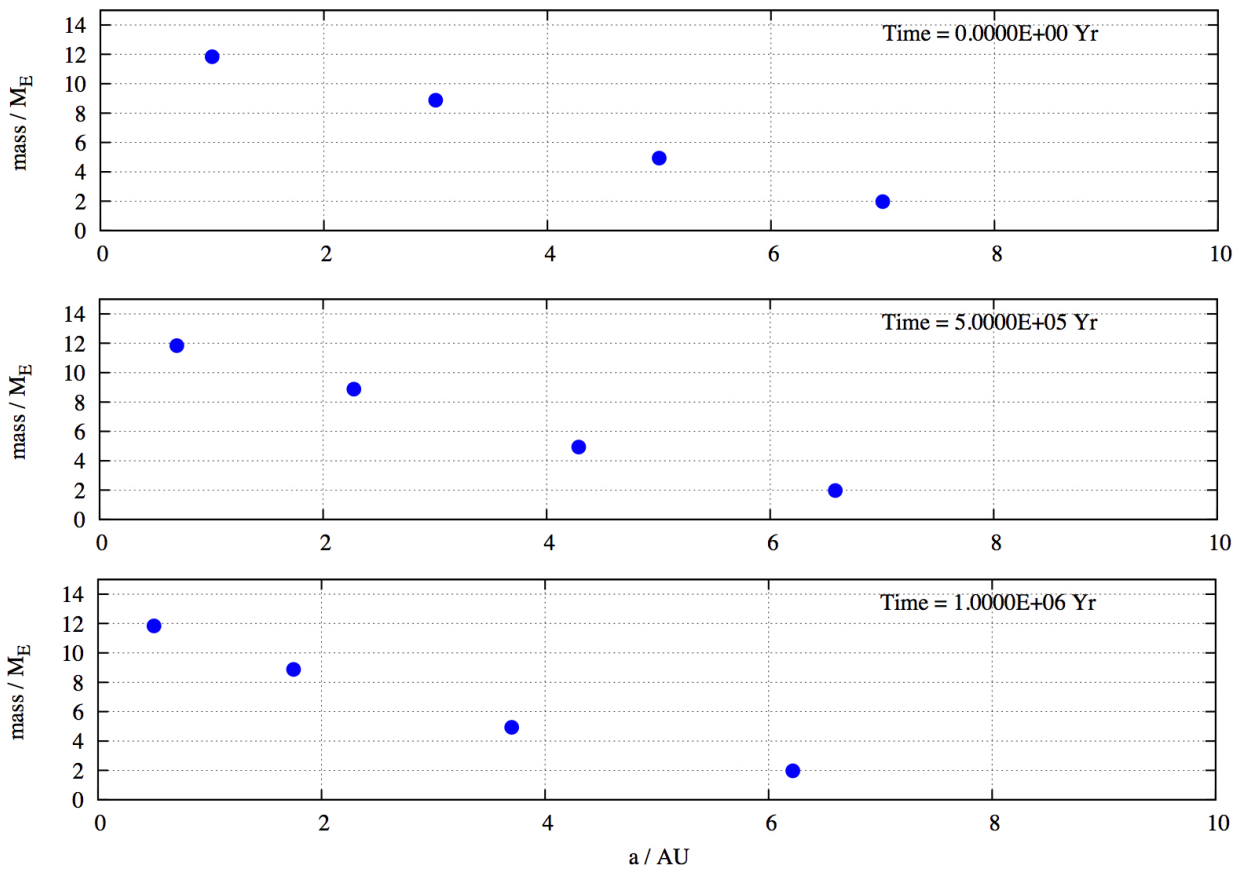


**Figure 3:** Outwards migration of the planets in an adiabatic gas disk with  $\alpha = 0$ . On the x-axis is the semimajor axis  $a$  in AU of each planet and on the y-axis their masses in  $M_{\oplus}$ .

### 3.2 Simulations

The simulations here presented were done assuming that the gas disk is adiabatic up to 0.5 AU and isothermal from 0.5 AU and beyond. As noticed in the test section, the migration in the disk will be outwards in the adiabatic part and inwards in the isothermal part if the parameter  $\alpha$  is close to zero. It is expected, therefore that stable system of planets can be formed even with the gas present.

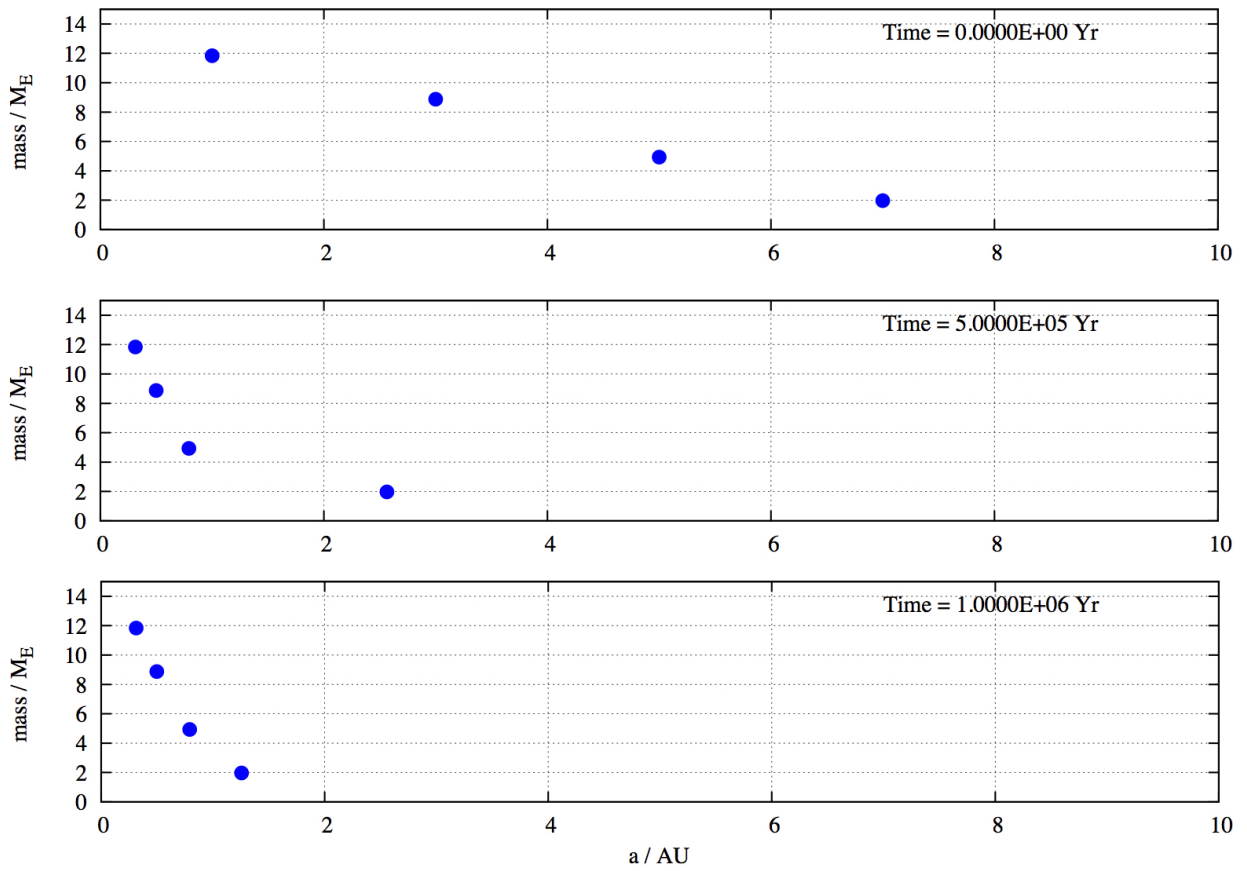
The first set of initial system is exactly the one from the test section. It was observed the evolution of the system for  $\alpha$  equals 0 (see Figure 4) and 0.1 (see Figure 5).



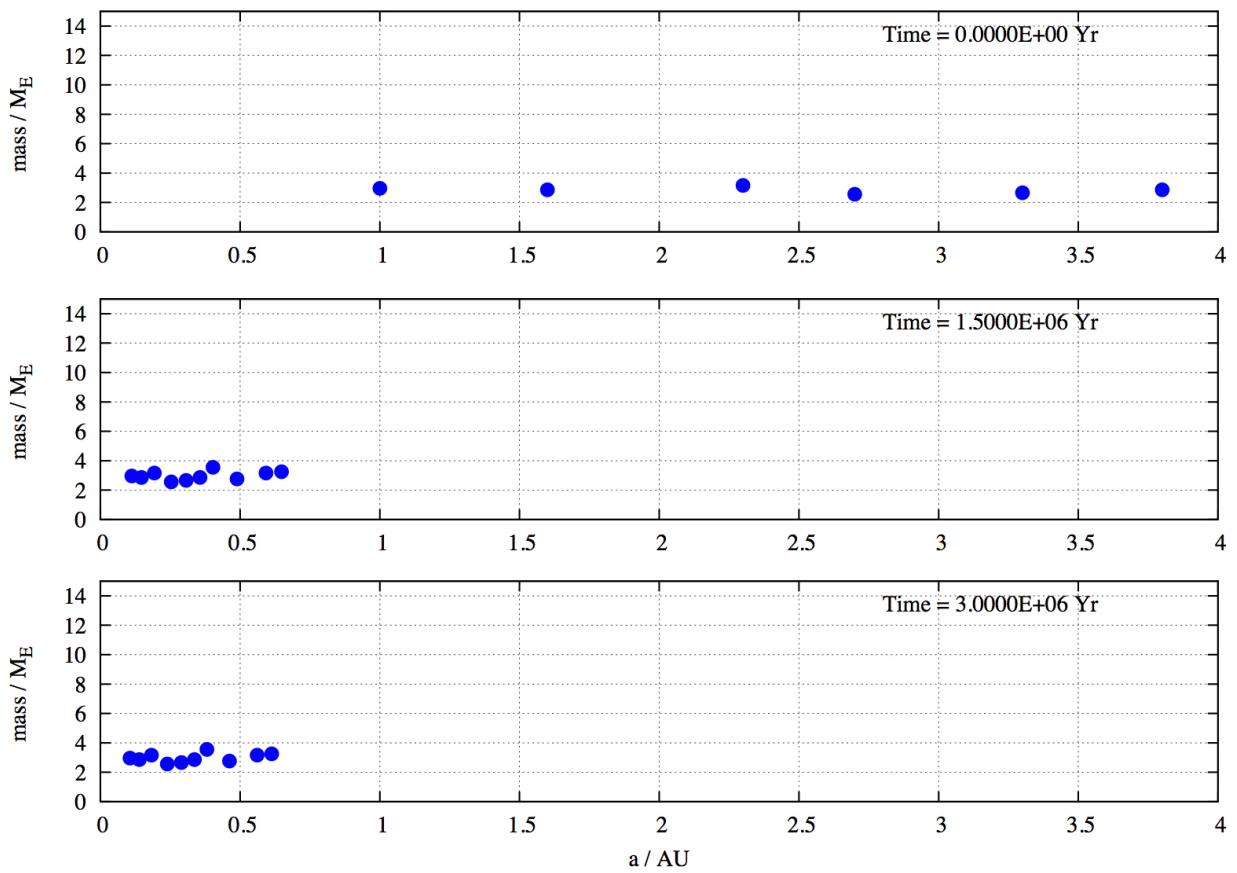
**Figure 4:** *The stability of this system is not guaranteed, the system did not reach a final state due to the slow rate of migration.*

It was noticed that the system with  $\alpha$  equals 0.1 evolved faster as predicted by formulas (5) and (7). Therefore, the value  $\alpha = 0.1$  was used for further investigation.

In order to get a general picture of the whole process 10 planets of mass randomly distributed around  $3M_{\oplus}$  were distributed from 1 to 7 AU (see Figure 6).

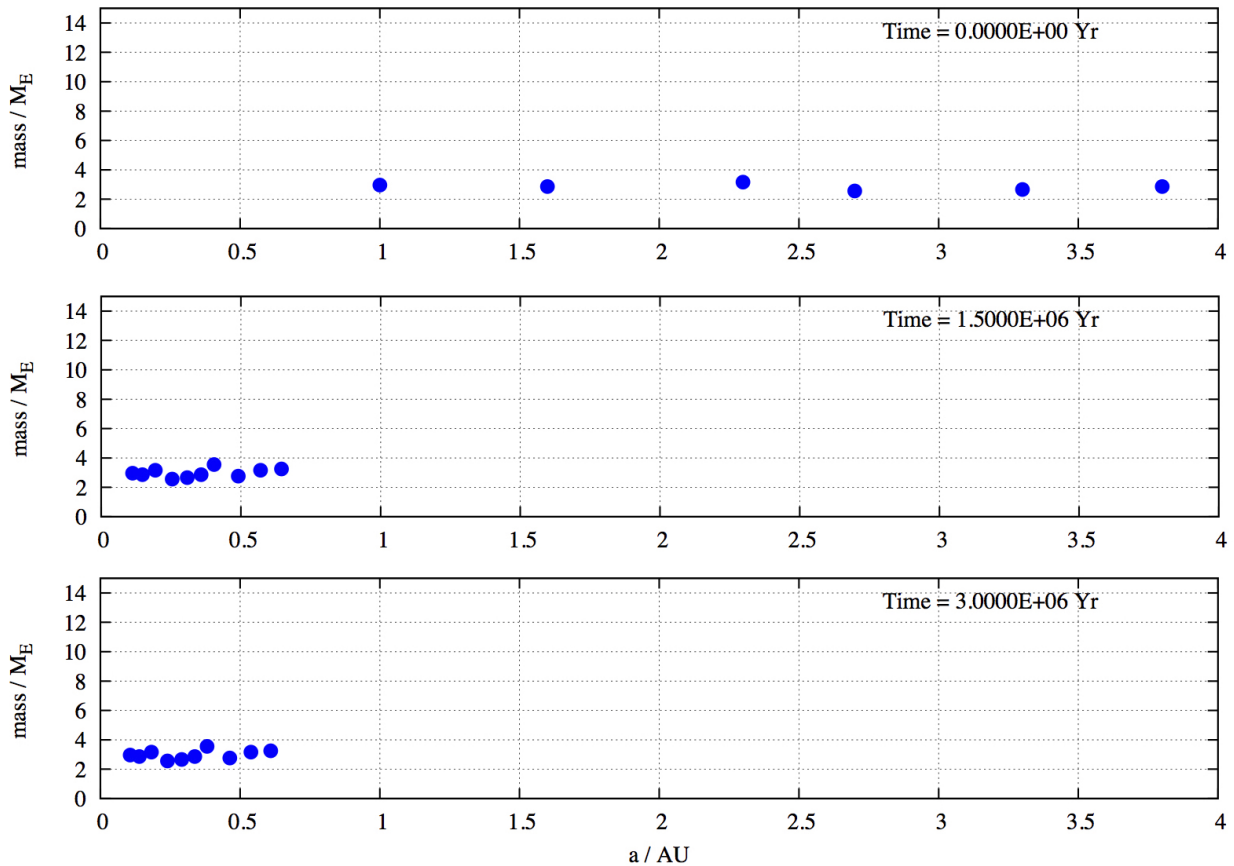


**Figure 5:** *In this simulation a stable formation of planets were observed. The configuration in the last panel did not seem to evolve.*



**Figure 6:** *The system again seems to have reached a final stage and no planetary accretion was observed.*

One can see that even though the planets got packed in much less spaced orbits they did not merge with each other. To test whether this system would also be possible in a longer and shorter lasting gas disk two new simulations were run: one with the gas disk decay time being  $10^8$  yrs (see Figure 7) and the other being  $10^6$  yrs (see Figure 8).

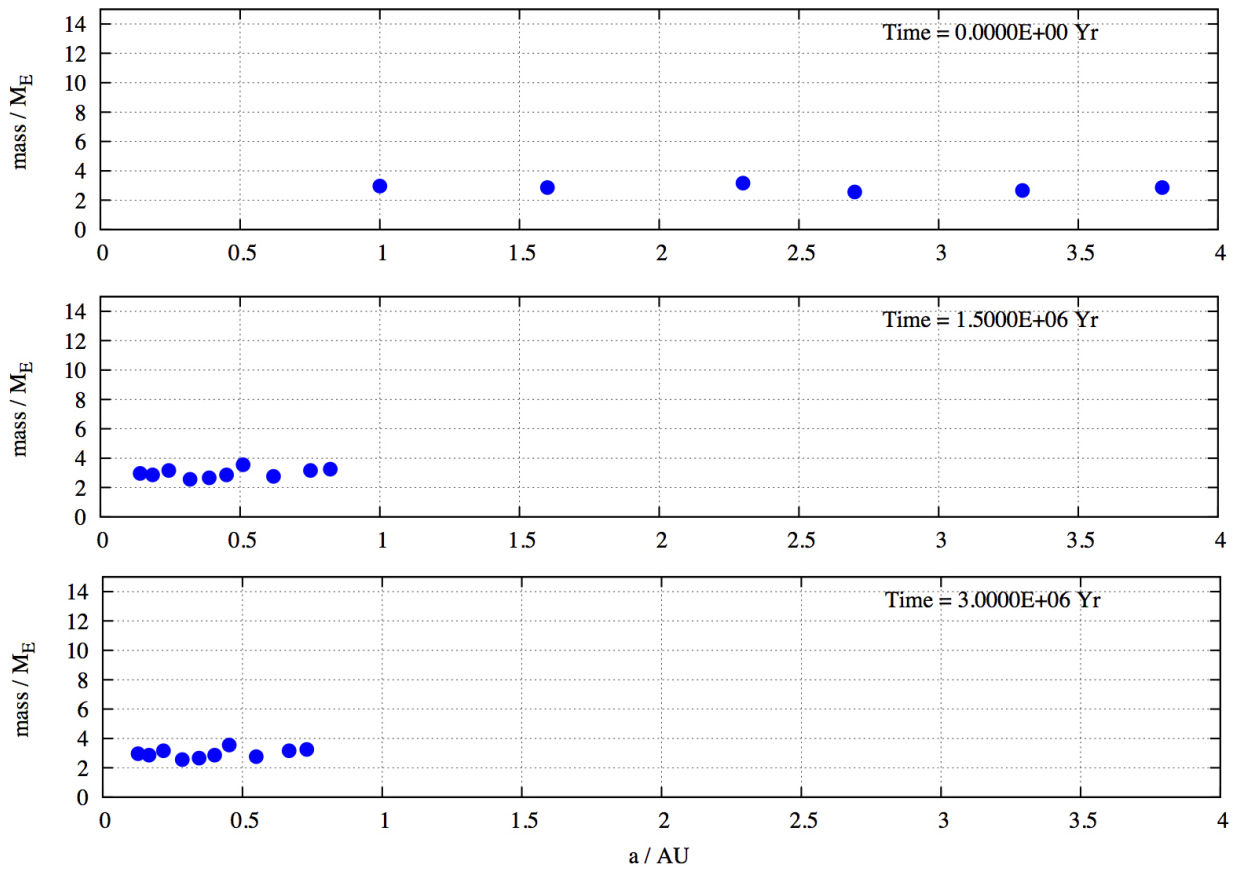


**Figure 7:** Gas disk decay time:  $10^8$  yrs. The system again seems to have reached a final stage and no planetary accretion was observed.

From what we can see in the figures above the disk decay time was not crucial for the final formation of the planetary system.

## 4 Discussion

It was possible to form packed systems localized in small radii through Type I Migration with a power law of  $\alpha = 0.1$  for the surface density if the planets are already present in the gas disk further out and if



**Figure 8:** Gas disk decay time:  $10^6$  yrs. The system again seems to have reached a final stage and no planetary accretion was observed.

the thermodynamical characteristics of the disk change in a certain radius, that in this paper was chosen to be 0.5 AU.

The choice of  $\alpha$  being 0.1 was made in order to get outwards migration in the adiabatic portion of the disk and inwards migration in the isothermal part. Creating, therefore, a planetary trap.

The idea that the gas would be adiabatic in inner regions and isothermal and outer regions comes from the fact that a dense region of the gas would trap better the heat of the system and therefore make this region 'more adiabatic', and inversely for the isothermal case.

But the value 0.5 AU itself was chosen more to try to form tightly packed inner planetary systems rather than to reflect any kind of thermodynamical result or observation. Therefore, even though the simulations were successful in creating packed planetary systems further research about the adiabatic-isothermal threshold in a gas disk is necessary.

Another result that can be observed from the last simulations (i.e., Figures 6, 7 and 8) was that the planets did not merge forming bigger planets as the ones found in STIPs formations. This was due to the slow rate of migration that allowed the planets to get in resonance with each other (see Table 3 for the found resonances).

**Table 3:** Resonances found for the system in Figure 6. The period ratios are between one planet and the one to its immediate right as in Figure 6.

Planet	a (AU)	Period (yrs)	Period Ratios	Closest Resonance	Relative Error (%)
1	0.126	0.045	0.667	2/3	0.02
2	0.166	0.067	0.666	2/3	0.09
3	0.217	0.101	0.666	2/3	0.11
4	0.285	0.152	0.749	3/4	0.12
5	0.345	0.203	0.799	4/5	0.08
6	0.401	0.254	0.831	5/6	0.24
7	0.453	0.305	0.750	3/4	0.02
8	0.549	0.407	0.748	3/4	0.22
9	0.666	0.544	0.875	7/8	0.02
10	0.728	0.621	-	-	-

## 5 Conclusion

It was shown in the section 3.1 that the implementation of the ideas presented by *Paardekooper et al. (2010)* were done in a correct manner. Furthermore, it was shown that in some cases the resulting systems in the simulation resembled STIPs using only the effects due the gas disk transition from adiabatic to isothermal.

It is of extreme importance to notice that the results presented in this report were obtained by associating only one value for the power law for the density through out the entire disk. This is indeed a limitation of

the simulations presented here, but it is also a really interesting aspect because it shows that systems like the ones found in the section 3 can be formed by a same global power law in surface density.

Therefore, it was noticed that planetary disks really close to be homogeneous in surface density can generate planet traps only by thermodynamical transitions. In this present report it was assumed that this transition is a characteristics of the disk itself and is independent of the planet masses. But further research could study cases in which the the radius of thermodynamical transition depends on the mass of the planets or how it is related to the disk itself.

The simulations produced planets in resonance with each other, which is not true in most STIPs. The simulations also did not produce accretion of planets. A more diverse choice of parameters like initial surface density at 1 AU and scale height at 1 AU could be varied to verify if accretion of planets would happen or not.

## Acknowledgments

I would like to thank Dr. Martin Duncan for his careful supervision on this project. This work was supported by CNPq (*Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico*) and was developed at Queen's University.

I would also like to thank the organization committee of *XI Semana da Física* for the opportunity to present a banner based on this work.

## References

- [1] Paardekooper S.-J. et al. (2010) *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 401, 1950.
- [2] Duncan, M. J., Levison, H. F. & Lee, M.H. (1998). *A.J.*, 116, 2067.
- [3] Baruteau et al. (2014) in: *Protoplanetary Disks and Stars VI*, University of Arizona Press, 667.

# Analise de protoestrelas com dados observacionais abertos

HUGO ATAIDES GOMES\*      IVAN SOARES FERREIRA †

Instituto de Física - Universidade de Brasília - UnB  
Campus Universitário Darcy Ribeiro - Asa Norte  
70919-970 Brasília / DF

## Resumo

*O estudo de regiões densas do meio interestelar é importante, pois são nessas regiões em que nascem as estrelas. Estas regiões são chamadas de nuvens moleculares e são frias, o que torna necessária sua observação na faixa do infravermelho ou microondas. Telescópios espaciais disponibilizam livremente os dados de suas observações, tal como o Telescópio Espacial Herschel, que observa na faixa do Infravermelho Distante (FIR, do inglês Far Infrared, 25-350  $\mu\text{m}$ ). Discutimos aqui como ter acesso a esses dados e também algumas funcionalidades para se analisar imagens de objetos estelares.*

## 1 Introdução

O processo de formação de uma estrela [1] inicia-se quando, devido a várias possíveis causas, uma nuvem molecular fria do meio interestelar colapsa sob efeito de sua própria gravidade, até que sua pressão e temperatura centrais sejam suficientes para iniciar a fusão nuclear, fenômeno por meio do qual uma estrela produz energia. Neste estágio, a pressão da radiação resultante da fusão é responsável por causar expansão na estrela, enquanto sua gravidade a faz contrair. Quando há o equilíbrio dessas forças, diz-se que a estrela atingiu o equilíbrio hidrostático e a classificamos como estrela da sequência principal.

É longo, porém, mais de  $10^5$  anos, o tempo necessário para que uma protoestrela - uma estrela jovem - atinja a sequência principal, podendo às vezes nem atingi-la. O fator mais determinante no processo de sua contração gravitacional é a massa inicial da nuvem molecular que lhe dará origem. Se sua massa inicial for muito pequena,  $M \leq M_J$  (massa de Jeans<sup>1</sup>), a nuvem não produzirá um objeto colapsado. Por conseguinte, para que o objeto colapsado resultante da contração da nuvem molecular seja capaz de realizar fusão nuclear, sua massa deve ser  $M > 0,08 M_\odot$  ( $M_\odot$  representa uma massa solar, da ordem de  $10^{33}$  g).

---

\*hugoataidesgomes@gmail.com

†physicaeorganum@gmail.com

<sup>1</sup> $M_J \simeq 1,4 \times 10^{-10} \frac{T^{3/2}}{\rho^{1/2} \mu^{3/2}} M_\odot$ , em que  $T$  é a temperatura do gás em K,  $\rho$  é a densidade em  $\text{g}/\text{cm}^3$  e  $\mu$  é o peso molecular médio.

Conhecer as características de uma protoestrela possibilita saber como será seu processo evolutivo, se chegará à sequência principal, se se tornará uma estrela anã, gigante vermelha, estrela de nêutrons, etc. Além disso, o estudo de regiões densas do meio interestelar possibilita saber quais delas são propícias à formação de estrelas.

A partir de observações no infravermelho e microondas com telescópios espaciais, podem-se obter dados sobre nuvens moleculares e protoestrelas que permitirão classificá-las para, então, entendermos seus processos evolutivos.

## 2 Diagrama de Hertzsprung-Russell

Os astrofísicos Ejnar Hertzsprung e Henry Norris Russell desenvolveram, independentemente, um diagrama que relaciona a luminosidade de uma estrela com sua temperatura superficial, também chamada de temperatura efetiva. Este diagrama é conhecido como diagrama HR. Seu eixo horizontal, representado pela temperatura efetiva, geralmente em Kelvins, tem sentido crescente da direita para a esquerda. O eixo vertical, que cresce para cima, é representado pela luminosidade da estrela, geralmente expressa em termos da luminosidade do Sol.

Pela lei de Stefan-Boltzmann, a luminosidade de uma estrela é dada por:

$$L = 4\pi r^2 \sigma T_{eff}^4 \quad (1)$$

em que  $r$  é o raio da estrela,  $\sigma$  é a constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma \approx 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ ) e  $T_{eff}$  é sua temperatura efetiva.

Pode-se ver a dependência entre luminosidade e temperatura efetiva, que também é função do raio. Ao localizarmos uma estrela no diagrama HR, podemos estimar seu raio em comparação a outras estrelas. Vejamos, por exemplo, como obter informações de uma gigante vermelha no diagrama HR. Este tipo de estrela é caracterizada por baixas temperaturas superficiais, menores que 5000 K, o que explica sua coloração avermelhada. Elas são localizadas na parte superior direita do diagrama HR, o que indica que são frias e muito luminosas. Pela relação (1), como se tem uma temperatura muito baixa, resta que o raio possui valor muito elevado, característica mais marcante de uma gigante vermelha, como é evidente em seu nome.

As estrelas na sequência principal são as mais comuns de se encontrar no Universo, pois passam a maior parte de sua vida nessa fase. Durante este estágio, elas formam uma faixa característica em um diagrama HR, localizada em seu centro. Por este motivo, esta faixa do diagrama é sua parte mais populosa.

Já as protoestrelas, que possuem baixa temperatura, da ordem de  $T \approx 10^3 \text{ K}$ , emitem pouquíssima luz visível e, por isso, devem ser observadas na região infravermelha do espectro eletromagnético. Portanto, elas são localizadas na parte inferior direita do diagrama HR.

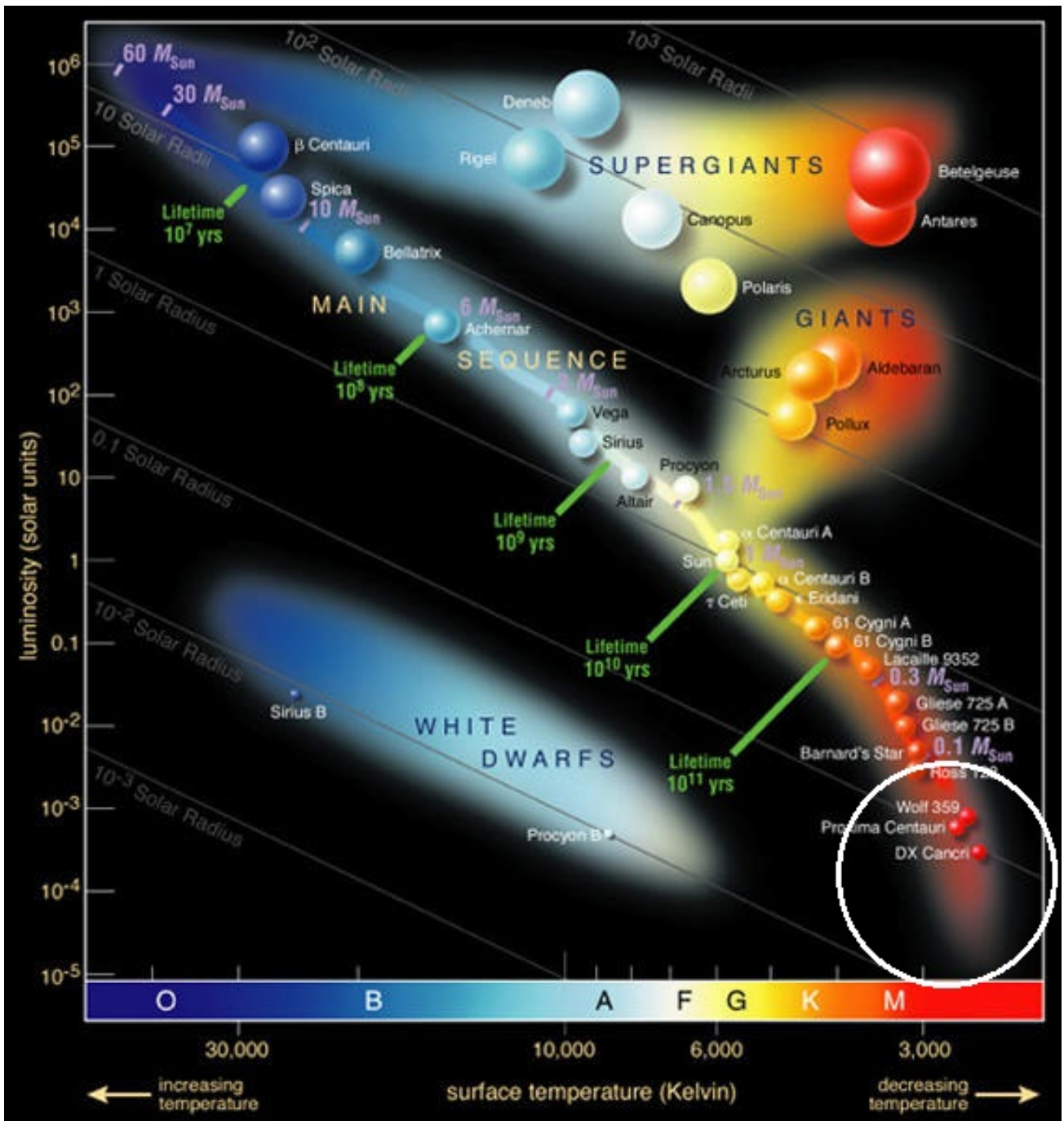


Figura 1: Diagrama HR. O nosso grifo indica a área em que estão localizadas as protoestrelas.

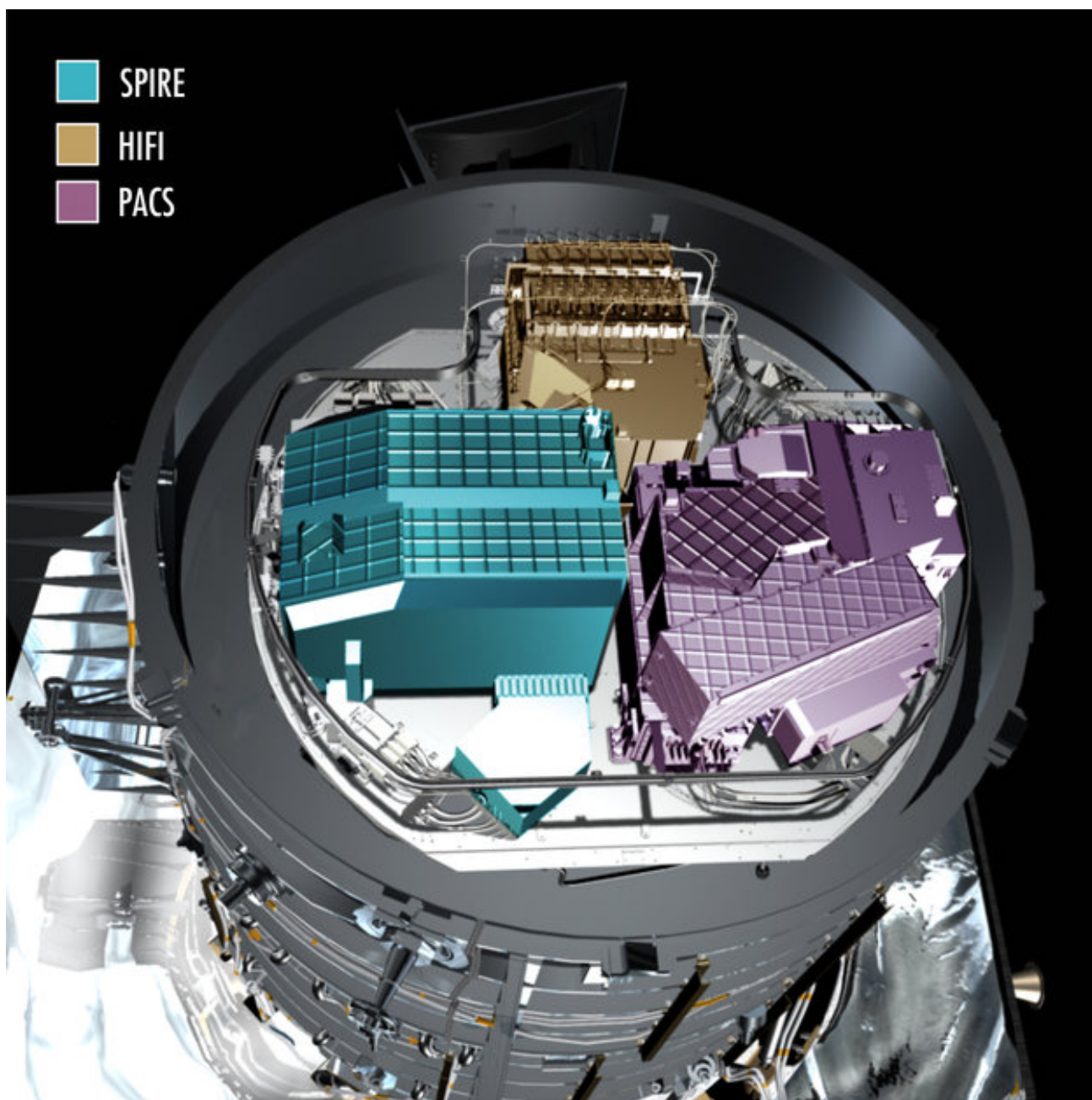
### 3 Telescópio Espacial Herschel

O Telescópio Espacial Herschel [2] foi lançado em 2009, sendo o maior telescópio de infravermelho até então construído, com uma abertura de 3,5 m.



**Figura 2:** *Ilustração do Observatório Espacial Herschel. Fonte: <http://herschel.cf.ac.uk/>*

É munido de três instrumentos, que funcionam como câmeras ou espectrômetros, variando e combinando suas observações em faixas submilimétricas e no infravermelho do espectro eletromagnético, desde aproximadamente 55 a 672  $\mu\text{m}$ . Estes instrumentos são: **H**eterodyne **I**nstrument for the **F**ar **I**nfrared (HIFI), **P**hotodetector **A**rray **C**amera and **S**pectrometer (PACS) e **S**pectral and **P**hotometric **I**maging **R**eceiver (SPIRE).



**Figura 3:** Instrumentos do Herschel, posicionados abaixo do espelho. Fonte: <http://www.esa.int/>

Desde que foi lançado, o Herschel ajudou os cientistas a estudar várias estruturas do Universo, desde galáxias, suas formações e evoluções, até as estruturas de sistemas planetários. O Telescópio possui também seu papel importante no estudo de estrelas em formação.

### 3.1 Acesso às observações e análise de dados

A Agência Espacial Europeia, *European Space Agency* ou ESA, responsável pelo Herschel, disponibiliza uma vasta quantidade de observações realizadas por este Telescópio através do *Herschel Science Archive* (HSA), por meio do qual podemos obter esses dados. Este *software* pode ser acessado por meio do site<sup>2</sup> da ESA.

Das observações disponíveis, podemos obtê-las com variados níveis de processamento, desde imagens brutas, sem nenhum tipo de processamento após terminada a observação, até imagens que se encontram mais nítidas, podendo ser utilizadas para pesquisa científica. Essas últimas são classificadas como produtos de nível 2 ou 2.5.

Os arquivos das observações encontram-se no formato *.fits*, comumente usado para armazenamento de dados astronômicos, em grande parte imagens. O *Flexible Image Transport System* (FITS) pode ser aberto com programas específicos, como também pode ser lido utilizando-se várias linguagens de programação.

O ambiente desenvolvido pela ESA para se trabalhar com as observações do Herschel chama-se *Herschel Interactive Processing Environment* (HIPE). Com ele, podemos acessar os dados obtidos pelo HSA, visualizá-los e manipulá-los, além de fazer análises científicas. Este programa também pode ser encontrado no site<sup>3</sup> da ESA referente ao Herschel.

## 4 Algumas funcionalidades para análise de imagens de objetos estelares

São inúmeras as funcionalidades que podem ser aplicadas na análise de imagens e, em particular, das astronômicas. O HIPE, por si só, já embute funcionalidades como, por exemplo, soma de imagens, potenciação dos valores de uma imagem por um número, e várias operações de aritmética com imagens [3]. Apesar disso, o usuário possui ainda a possibilidade de criar seus próprios algoritmos. Na análise de uma imagem astronômica, o HIPE fornece dados como  $Jy/pixel$ ,  $Jy/sr$  ou  $Jy/beam$ , que são unidades relacionadas com o fluxo de uma fonte de radiação. Ao, por exemplo, somar duas imagens, o resultado será uma terceira imagem, cujos pixels terão como valores de fluxo a soma dos respectivos valores de fluxo dos pixels das duas primeiras imagens. A aritmética com imagens tem como finalidades, por exemplo, a remoção de ruídos, comparação de qualidade entre imagens, verificação de movimento de objetos na imagem, realce de formas, alteração de contraste, etc.

O indicador de fluxo por pixel na imagem permite calcular a luminosidade monocromática de uma fonte por meio da relação:

$$F_V(r) = \frac{L_V}{4\pi r^2} \quad (2)$$

na qual  $F_V$  é o fluxo medido,  $L_V$  é a luminosidade monocromática e  $r$  a distância da fonte ao observador. Para estimar o fluxo, faz-se a média do correspondente para todos os pixels da imagem e, em seguida, conforme (2), multiplica-se o resultado por  $4\pi r^2$ .

<sup>2</sup>Acesso ao HSA: <http://archives.esac.esa.int/hsa/whsa/>

<sup>3</sup>Informações e *download* do HIPE: <https://www.cosmos.esa.int/web/herschel/hipe-download>

As coordenadas de um objeto em uma imagem astronômica, dada a proporcionalidade, são identificadas por pixels. Comumente, utilizam-se a ascensão reta e declinação para localizar esses objetos, como também é o caso do HIPE. Por meio dessas coordenadas, conhecendo-se a distância até o objeto astronômico e as propriedades do telescópio, podem-se calcular tamanhos em uma imagem. O próprio programa em questão fornece uma ferramenta para se calcular distância angular e, a partir daí, obter meios para medir estruturas na imagem.

## 5 Conclusão

Apesar de termos a ideia de que são necessários supercomputadores para processamento de imagens astronômicas, é possível analisar e fazer processamentos mais básicos em um computador mais simples. Além disso, são disponibilizadas ferramentas com as mais variadas funcionalidades que o permite, de casa, por exemplo, executar estudos sobre objetos astronômicos. Elucidamos o estudo de corpos celestes a partir de imagens feitas por telescópios espaciais, que são livremente distribuídas, o que contribui para que mais pesquisadores tenham acesso a dados científicos e, conseqüentemente, melhor aproveitados sejam esses dados observacionais.

Este *paper* teve como objetivo introduzir o leitor sobre processamento de imagens astronômicas e sobre alguns aspectos que regem a dinâmica da vida de uma estrela. Uma pesquisa mais aprofundada, com maior correlacionamento entre estes tópicos e suas aplicações, está sendo realizada junto ao LaCOSA como projeto de iniciação científica, cujos resultados serão apresentados no Congresso de Iniciação Científica da UnB de 2017.

## Referências

- [1] W. J. Maciel, **Introdução à Estrutura e Evolução Estelar**. Editora da Universidade de São Paulo, 1999.
- [2] G. L. Pilbratt et al, **Herschel Space Observatory: An ESA facility for far-infrared and submillimetre astronomy**. A&A, 518 L1, 2010.
- [3] D. N. Müller, E. L. Daronco, **Operações aritméticas em imagens**. UFRGS, 2000.

# Como o Sistema Solar se formou: A Busca pelo Planeta Desconhecido

RODNEY GOMES\*

Observatório Nacional

Rua General José Cristino 77, CEP 20921-400, Rio de Janeiro, Brazil

## Abstract

*Apresento uma síntese dos processos de formação e evolução dinâmica primordial do Sistema Solar desde o colapso da nebulosa primordial até a formação dos planetas. A seguir, descrevo os processos de migração planetária que se seguiram à formação planetária. Em seguida, apresento um histórico da busca por planetas desconhecidos do Sistema Solar, passando pela descoberta de Netuno e Plutão. Finalmente, apresento as recentes evidências que apontam para a possibilidade da existência de um planeta ainda não descoberto nos confins do Sistema Solar.*

Palavras-chave: Sistema Solar, planeta 9

## 1 Introdução

Estima-se a idade do Sistema Solar em 4.5 bilhões de anos. Durante a maior parte do tempo (digamos os últimos 4 bilhões de anos) a configuração orbital dos objetos do Sistema Solar não se modificou significativamente. No entanto, nos seus primórdios, o Sistema Solar evoluiu muito rapidamente e as órbitas dos seus objetos, inclusive seus maiores componentes, os planetas, diferiam muito das órbitas que hoje conhecemos. No capítulo 2, vou discorrer sobre este processo rápido de evolução do Sistema Solar nos seus primórdios, desde um disco de gás e poeira até a formação dos planetas. No capítulo 3, discorrerei sobre os processos de migração planetária que mudaram significativamente a distribuição das órbitas dos planetas (e outros objetos do Sistema Solar). No capítulo 4 apresentarei um histórico sobre a busca de um planeta desconhecido e discorrerei sobre porque a possibilidade de haver ainda um planeta desconhecido nos confins do Sistema Solar ganhou novo impulso recentemente.

## 2 A formação do Sistema Solar

A nebulosa primordial que dá origem a um sistema planetário e, em particular, a nebulosa que deu origem ao Sistema Solar, é formada em sua maior parte por hidrogênio, que é o gás mais abundante no

---

\*rodney@on.br

universo e alguma fração de hélio e outros gases. A parte sólida compreende o que podemos chamar de gelo, principalmente de água, metano e amônia, e de silicatos (material rochoso) e, por fim, metais. Uma vez formada a estrela pela contração da nuvem, descrito logo abaixo, haverá uma distância à mesma, chamada de linha de gelo, dentro da qual o material tipo gelo da nebulosa se sublimará em gás. Como a fração de gelo é bem maior que a fração de silicatos e metais originalmente na nebulosa, a partir da linha de gelo, a densidade de sólidos será muito maior do que anteriormente a esta linha. Este conceito é importante para entendermos a formação planetária no Sistema Solar que gerou os planetas terrestres e os planetas gigantes.

A formação do Sistema Solar está intimamente ligada à formação de sua estrela, o Sol. Estrelas nascem da contração gravitacional de uma nuvem de gás, chamada nebulosa. Nessas nuvens, o gás tende a se expandir e a auto gravidade tende a contrair a nebulosa. Muitas vezes a contração é desencadeada pela contaminação da nuvem por elementos pesados vindos da explosão de uma supernova. Durante a contração da nebulosa, a conservação do momento angular gera um achatamento da mesma, dando origem a um corpo central que virá a ser a estrela e um disco de gás e poeira (material sólido) circundando a mesma.

A contração gravitacional de uma nebulosa pode dar origem a mais de uma estrela e este é o processo mais provável pelo qual sistemas binários e múltiplos de estrelas são formados. O Sol é uma estrela sem companheira, o que na verdade é mais excepcional do que estrelas com uma ou mais companheiras. Na formação de sistemas binários (mesmo raciocínio para sistemas múltiplos), uma das estrelas será maior, naturalmente. A menor estrela poderá ser tão pequena quanto uma anã marrom ou mesmo um super planeta. Cogitou-se por algum tempo que Júpiter e, eventualmente, Saturno pudessem ter sido formados juntos com o Sol durante o processo de contração da nebulosa solar. No entanto, hoje é praticamente unânime a ideia de que todos os planetas, incluindo os maiores, Júpiter e Saturno, foram formados a partir do disco primordial de gás e poeira que circundava o Sol. As duas razões principais seriam a dificuldade de se formar companheiras solares planetárias tão "pequenas" quanto Júpiter (e Saturno) e, principalmente, o fato de que todos os planetas têm suas órbitas aproximadamente no mesmo plano, o que é de se esperar se os planetas tiveram sua origem a partir do disco primordial de gás e poeira.

## **2.1 De poeira a pedregulhos**

A formação de planetas (e outros corpos menores do Sistema Solar) a partir de um disco de gás e poeira envolve três ou quatro estágios, e em todos eles a ideia é basicamente a mesma: a aglutinação dos sólidos em corpos cada vez maiores. Primeiramente, focalizaremos a primeira fase de formação planetária, de grãos micrométricos existentes na nebulosa primordial até objetos de alguns centímetros de diâmetro, que poderíamos chamar de pedras ou pedregulhos. A aglutinação dos sólidos nesta primeira fase se dá através de forças do tipo Van der Waals, que são resultantes da polaridade química (mesmo que fraca) das moléculas formadoras dos sólidos. Para que isto aconteça é necessário que estes grãos primordiais colidam mutuamente com velocidades baixas. A ação do gás é importante nesta fase já que este mantém as órbitas dos grãos bastante circulares, o que implica em velocidades muito uniformes para grãos a uma mesma distância do Sol (que são os que vão se colidir). Esta aglutinação inicial de grãos depende também da densidade de sólidos no disco. Uma alta densidade de sólidos é conseguida na medida em que os grãos

primordiais se acumulam em um fino disco dentro do disco de gás mais espesso. Essa contração do disco sólido é causada pelo arrasto do gás que amortece o movimento vertical de pequenos grãos inicialmente em órbitas fora do plano central do disco.

## 2.2 De pedregulhos até planetesimais

A partir de alguns centímetros a aglutinação dos sólidos torna-se pouco eficiente. Para entendermos esta falta de eficiência é importante ressaltarmos duas questões importantes na formação primordial do Sistema Solar. Primeiro, o gás do disco só permanece neste por um período que é avaliado entre 1 e 10 milhões de anos <sup>1</sup>. Os planetas gigantes, principalmente Júpiter e Saturno, possuem uma fração importante de gás em sua composição o que mostra que eles foram formados em no máximo 10 milhões de anos, ou seja, enquanto persistia o gás no disco. Por outro lado, corpos da ordem do metro dentro do disco de gás vão sofrer o que chamamos de arrasto do gás. Este é causado pelo fato de que os objetos sólidos tendem a girar em torno do Sol com velocidade kepleriana ao passo que o gás, devido a sua pressão interna, se move com velocidade sub-kepleriana. Esta diferença de velocidades gera uma força de arrasto em sólidos do disco primordial. Esta força é direcionada opostamente à velocidade do corpo, causando uma perda de energia e momento angular deste, o que, por sua vez, leva o corpo a eventualmente colidir com o Sol. Esta força de arrasto depende do tamanho do objeto, sendo máxima para corpos da ordem do metro de diâmetro. Nesta faixa de tamanho, um objeto colide com o Sol a partir de uma distância de 1 au <sup>2</sup> em cerca de 100 anos, portanto muito rápido para poderem seguir se aglutinando para formarem corpos maiores. Esta dificuldade é denominada de barreira do metro, o que se traduz pela impossibilidade de pedras centimétricas continuarem se aglutinando para formarem corpos maiores num intervalo de tempo compatível com a escala de tempo de sobrevivência do disco de gás. Uma possível solução para este impasse é descrita a seguir.

Uma ideia proposta para se transpor a barreira do metro é acumular muitos corpos do tamanho de pedregulhos diretamente para formar objetos de vários quilômetros de diâmetro. Uma das teorias mais aceitas supõe que aleatoriamente em alguma região do disco a densidade de sólidos vai ser maior. Isso faz com que esse aglomerado mais denso de partículas faça o gás girar mais rápido na vizinhança do aglomerado (arrasto dos sólidos no gás). Isso, por sua vez, causa um arrasto menor nesse aglomerado de partículas e portanto um deslocamento radial mais lento do que partículas individuais. Estas, deslocando-se mais rapidamente radialmente, acabam por encontrar o aglomerado e aumentar o seu tamanho continuamente até eventualmente formar um planetesimal de centenas quilômetros de diâmetro.

## 2.3 De planetesimais até embriões planetários

Planetesimais de 100 km de diâmetro ou maiores se atraem gravitacionalmente de forma a promover colisões mútuas. Nesta fase, as velocidades relativas entre planetesimais próximos ainda é pequena implicando em colisões construtivas. A partir daí, os planetesimais vão começar a crescer de maneira mais ou menos uniforme, mas por questões puramente aleatórias alguns vão começar a crescer mais que outros.

---

<sup>1</sup>o gás é expulso quando a estrela passa por uma fase de sua evolução, chamada T-Tauri

<sup>2</sup>1 ua (uma unidade astronômica) é a distância média entre o Sol e a Terra

Acontece que quanto maior o planetesimal, maior a atração que este exerce sobre seus vizinhos. Daí se gerar o que chamamos de "runaway growth", cuja melhor tradução seria crescimento desenfreado. No final dessa fase, vão se formar alguns corpos maiores que podemos chamar de embriões planetários que terão um espaçamento mais ou menos uniforme entre si. Ainda restarão planetesimais entre os embriões, formando um sistema de embriões e planetesimais. A partir daí, é didático dividirmos a formação do Sistema Solar entre o externo e o interno.

### **2.3.1 Formação do Sistema Solar interno**

Os embriões planetários do Sistema Solar interno devem ter tido tamanhos entre a Lua e Marte. Após o crescimento dos planetesimais até embriões forma-se um sistema mais ou menos estável gravitacionalmente. Acontece que o Sistema Solar externo se forma mais rapidamente por ter uma concentração de sólidos maior (ver subseção seguinte). A formação do gigante Júpiter provoca uma perturbação forte na parte externa do sistema de embriões, onde se encontra hoje o cinturão de asteroides. As órbitas dos embriões começam a se tornar excêntricas (não circulares) provocando a colisão entre planetesimais e embriões e destes entre si. Esta vem a ser a última fase de formação do Sistema Solar interno. Os embriões colidem entre si formando corpos cada vez maiores até gerar o Sistema Solar interno formado pelos quatro planetas que conhecemos. A Lua em particular teria sido formada a partir da última colisão de um embrião (chamado de Theia) com a proto-Terra. Esta colisão se deu tangencialmente descolando material rochoso da Terra que posteriormente se aglutinou para formar a Lua, que tem uma densidade menor que a da Terra. A Lua não tem uma componente importante de metais como a Terra, o que é uma evidência deste cenário para a formação da Lua.

Este último processo de formação dos planetas terrestres pode ser simulado através de integradores numéricos de objetos que se movem em torno de um corpo central mais massivo (Sol). Muitos artigos científicos foram produzidos nos últimos vinte anos baseados nessas simulações que têm produzido planetas terrestres cada vez mais semelhantes aos atuais (massa e órbita). Estima-se a formação final do Sistema Solar interno em cerca de 100 milhões de anos. Um resultado importante desta última fase de formação do Sistema Solar interno é o aparecimento do cinturão de asteroides. Ele seria formado por planetesimais que sobraram da região primordial de embriões e planetesimais. A forte perturbação de Júpiter não permitiu que embriões crescessem construtivamente na região asteroidal e sobraram só alguns planetesimais com órbitas excêntricas e inclinadas, muitos deles na verdade não originais, mas pedaços resultantes de colisões entre os próprios planetesimais originais. A formação do cinturão de asteroides é talvez um assunto mais intrigante do que a dos próprios planetas, já que ele apresenta características muito peculiares tanto na distribuição de suas órbitas como nas suas variadas composições químicas em todo o cinturão. Estas propriedades dos asteroides fornecem vários vínculos importantes para constranger a forma correta como o Sistema Solar inicial foi formado.

### **2.3.2 Formação do Sistema Solar externo**

Embora a quantidade de material sólido do Sistema Solar externo seja bem maior que o interno por incluir gelo de água, metano, etc., material muito mais abundante do que rochas e metais, este material sólido no sistema externo se distribuía por regiões bem mais amplas do que no Sistema Solar interno.

Além disso o sistema externo deveria-se formar em no máximo 10 milhões de anos, tempo máximo de persistência do gás no disco primordial. Estes fatores puseram obstáculos difíceis de se transpor quando se simulava a formação do Sistema Solar externo através da aglutinação de embriões por atração gravitacional, como feito com sucesso para o Sistema Solar interno. Mesmo que se formasse algo semelhante ao sistema real, isso nunca era conseguido em menos de 10 milhões de anos mas em tempos bem maiores passando dos 100 milhões de anos previstos para o sistema interno. Estudos promissores tem sido propostos mais recentemente através de uma abordagem diferente da simples aglutinação de embriões por colisões mútuas. O novo conceito vai fazer uso dos pedregulhos citados na seção 2.2. Na verdade, quando se diz que as pedras crescem até planetesimais e estes até embriões não significa que todos estes corpos de diversos tamanhos não possam coexistir durante a maior parte da fase de formação do Sistema Solar. Usa-se, então, o conceito de arrasto do gás nos pedregulhos que fazem estes espiralarem em direção ao Sol mas, no caminho, encontram e colidem com planetesimais. Da mesma forma como os pedregulhos se perderiam rapidamente por colisão com o Sol se não houvesse nenhum obstáculo no caminho, eles se aglutinam rapidamente nos planetesimais, formando corpos de tamanhos planetários e sub-planetários muito rapidamente. Existem duas vertentes nessa última teoria, uma que diz que os planetesimais crescem diretamente até o tamanho de planetas e outra que diz que eles crescem até o tamanho de embriões<sup>3</sup> e, no final, colisões entre esses embriões formam finalmente os planetas. Este último cenário tem a vantagem de dar uma boa explicação para os eixos de rotação dos planetas externos, que são bem inclinados em relação ao plano invariante do Sistema Solar.

### 2.3.3 Júpiter e Saturno

Júpiter e Saturno são chamados de gigantes de gás ao passo que Urano e Netuno são chamados de gigantes de gelo. Supõe-se que os quatro planetas tenham um núcleo sólido em torno de 10 a 20 massas da Terra e o restante formado por gás. Desta forma, Júpiter que tem em torno de 300 massas da Terra e Saturno que tem em torno de 100 massas da Terra são chamados com razão de gigantes de gás, já que possuem em torno de 90% de gás em sua composição. Os conceitos expostos nas seções anteriores descrevem apenas o crescimento da parte sólida dos planetas. A parte gasosa é atraída para o planeta de forma bem rápida quando a parte sólida chega a 10 a 20 massas da Terra. Desta forma, Urano e Netuno são chamados de planetas de gelo porque não puderam atrair para si uma quantidade significativa de gás<sup>4</sup>. Admite-se que o gás do disco se dissipou no começo do processo de atração do gás pelos núcleos de Urano e Netuno.

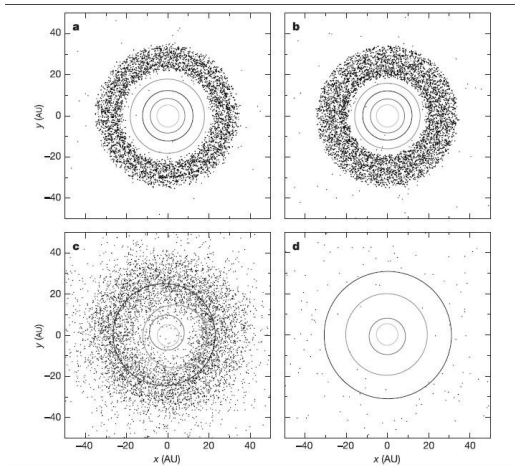
## 3 Migração planetária

As distâncias médias que os planetas se encontravam do Sol originalmente não eram as mesmas em que eles estão atualmente. Na verdade, embora as órbitas dos planetas mudem ao longo do tempo, sistemas planetários estáveis são caracterizados pela não variação das distâncias médias destes à estrela. Mas os

---

<sup>3</sup>no sistema externo, diferentemente do interno, esses embriões têm tamanhos de três a seis massas da Terra

<sup>4</sup>a massa de cada um deles é semelhante e em torno de 15 massas da Terra



**Figure 1:** *Órbitas dos grandes planetas e posições (no plano) de planetesimais em quatro fases, desde antes até depois da instabilidade gerada pelos encontros próximos entre os planetas*

primórdios do Sistema Solar, como de todo sistema planetário, teria sido muito mais instável. Migrações planetárias devem ter ocorrido em duas fases distintas da evolução do Sistema Solar. Na primeira fase, planetas migram pela interação gravitacional destes com o disco de gás primordial. Um disco com simetria radial vai ocasionar apenas uma componente radial da força gravitacional total deste no planeta. Já um disco não simétrico radialmente vai produzir uma força não radial aplicada ao planeta, gerando um torque e, conseqüentemente, uma variação na energia do planeta que se traduz por uma variação na sua distância média ao Sol. A variação dessa distância ao Sol, ou em termos de órbita, do semieixo maior da órbita planetária chamamos de migração planetária. Esta migração se dá porque o próprio planeta induz no disco uma distribuição não uniforme de massa, ou seja, quebra a simetria radial do disco. O estudo desse fenômeno envolve hidrodinâmica e seus detalhes vão além do escopo desse artigo, mas basta salientarmos que o disco externo ao planeta causa uma migração do planeta para dentro (em direção ao Sol) ao passo que o disco interno induz uma migração para fora. Dependendo das condições do disco e do planeta, o torque total aplicado ao mesmo pode induzir uma migração para fora ou para dentro. Em geral planetas gigantes sofrem uma migração para dentro. Esta conclusão já tinha sido avançada por teóricos antes da descoberta do primeiro planeta extrasolar, em 1995. Os primeiros planetas descobertos fora do Sistema Solar, até por causa do viés observacional, eram muito grandes e próximos da estrela, os chamados Júpiteres quentes (hot Jupiters). Apesar da surpresa dessas descobertas, foi inevitável associar a proximidade dos Júpiteres quentes às estrelas à teoria de migração planetária num disco de gás.

Os sistemas extrasolares se mostraram um ótimo laboratório para se estudar a migração planetária num disco de gás. Mas quanto ao Sistema Solar, por que Júpiter não migrou para mais perto do Sol? A resposta está na formação de Saturno. Se este se forma num tempo adequado depois de Júpiter, na região entre os dois gigantes, o disco de gás se dissipa pelo grande efeito gravitacional dos dois gigantes. Desta forma, os dois planetas vão migrar juntos em ressonância (mantendo uma razão constante entre suas distâncias ao Sol), como resultado do torque total vindo do disco interno à Júpiter e do disco externo a Saturno. Acontece que, por ser Saturno menos massivo que Júpiter, ele induz uma assimetria menor

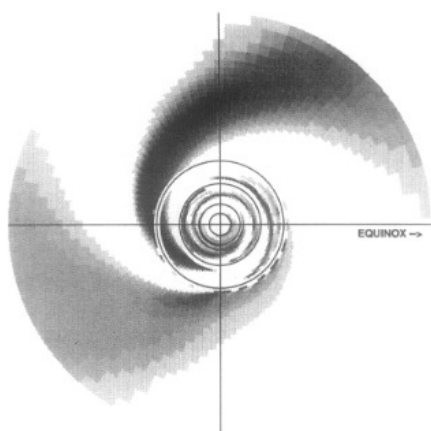
no disco externo, causando um torque externo menor do que se provocado por Júpiter. Desta forma, o torque vindo do disco interno tende a se igualar ao torque vindo do disco externo e os dois planetas não têm uma migração significativa que poderia levar Júpiter para muito perto do Sol. É interessante que, no caso do Sistema Solar, temos poucas evidências de como se processou esta migração primordial dos planetas. Em grande parte isso se deve ao fato de que uma segunda migração posterior ao desaparecimento do gás se processou e os sinais dessa última migração é que criaram as últimas impressões no Sistema Solar, "apagando" as primeiras. Ainda assim, cogita-se que Júpiter pode ter migrado em direção ao Sol durante algum tempo até Saturno se formar e reverter essa migração levando os dois gigantes para fora. Nesta incursão primordial, Júpiter poderia ter invadido a região onde hoje se encontra o cinturão de asteroides. Este cenário ofereceria uma boa explicação para a mistura de vários tipos de asteroides em diferentes distâncias destes ao Sol. Ao mesmo tempo, esvaziaria a região de excesso de planetesimais que, normalmente, nas simulações descritas na seção 2.3, induziriam a formação do planeta Marte grande demais. O espalhamento de planetesimais provocado pelo Júpiter invasor permitiria a formação de Marte próximo do seu tamanho atual.

### 3.1 Migração em um disco de planetesimais

Uma vez dissipado o gás do disco (o que deve ocorrer nos primeiros 10 milhões de anos), sobram os planetas já formados e um disco de planetesimais, ou seja, corpos menores que não conseguiram se aglutinar para formar planetas. Este disco estaria localizado na parte mais externa do Sistema Solar, depois do planeta mais distante formado. O disco de gás permitia uma estabilidade dos planetesimais, ou seja, suas órbitas eram bastante circulares. Uma vez dissipado o gás, a perturbação gravitacional do planeta mais externo sobre a porção mais interna do disco acaba por excitar as órbitas dos planetesimais. Estes começam a sofrer encontros próximos com o planeta mais externo, que acaba por espalhar o planetesimal para fora ou para dentro do Sistema Solar. Neste último caso, os planetesimais começam a ter encontros próximos também com os outros planetas. Assim é disparado o segundo processo de migração planetária, agora num disco de planetesimais. Desta feita, a migração se dá pela troca de energia e momento angular entre os planetas e os planetesimais que se encontram. A consequência é que os planetas migram para fora, exceto Júpiter, que migra para dentro (algo em torno de 0.2 a 0.5 au). Neste processo, os planetesimais são espalhados para fora e para dentro do sistema solar, podendo colidir com os planetas, inclusive os terrestres<sup>5</sup> ou formarem as populações de objetos mais longínquos do Sistema solar, os trans-netunianos e a nuvem de Oort. A forma como se deu essa migração também é controversa entre os astrônomos teóricos. Alguns propõem uma migração mais suave em que os planetesimais e planetas têm encontros próximos mas não os planetas entre si. O outro modelo de migração, conhecido como modelo de Nice (ver Figura 1), propõe que os planetas mesmos também sofreram encontros próximos. Nas últimas versões desta teoria, teria havido um quinto planeta gigante que durante a fase de encontros próximos teria sido expulso para fora do Sistema Solar.

---

<sup>5</sup>esta seria uma explicação para o disparo do chamado "Bombardeamento Pesado Tardio", que teria-se estendido até 400 My após a formação do Sistema Solar



**Figure 2:** *probabilidade de se encontrar o planeta X. As partes mais escuras denotam a região onde seria mais provável encontrar o planeta X. Tirado da tese de doutorado do autor*

## 4 A Busca pelo planeta desconhecido

Desde a antiguidade, se conhecem cinco planetas que podem ser vistos a olho nu: Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno. Com o advento das teorias heliocêntricas, a Terra também começou a ser vista como planeta. A olho nu, um planeta basicamente não se distingue de uma estrela. A sua peculiaridade, conhecida desde a antiguidade, é que os planetas se movem em relação às estrelas, por isso o nome planeta que vem da palavra grega que significa errante. Com o advento dos telescópios, não demorou muito para se descobrir Urano. A magnitude aparente de Urano, em torno de 6, o coloca no limite da visibilidade, ou seja, alguém com uma boa acuidade visual pode vê-lo numa noite escura e sem nuvens (nem poluição). Desta forma, a descoberta de Urano significa que ele foi pela primeira vez identificado como planeta, mas ele já teria sido observado antes, porém sem se perceber seu movimento entre as estrelas.

### 4.1 A Descoberta de Netuno

Por outro lado, a magnitude aparente de Netuno em torno de 8, não permite a sua visualização a olho nu, sob qualquer hipótese. A descoberta de Netuno foi bem mais interessante que a de Urano. Em 1846, quando Netuno foi descoberto, não só as técnicas observacionais tinham avançado em relação à época do descobrimento de Urano, como também a física newtoniana tinha-se desenvolvido matematicamente naquilo que chamamos de mecânica celeste. As leis de Newton de movimento e da gravitação são suficientes para prever com grande precisão o movimento dos corpos do Sistema Solar (imprecisões surgem no caso de planetas mais próximos do Sol, em especial Mercúrio, que necessita de uma abordagem relativística). Mas uma coisa são as equações serem corretas, outra é resolver as equações diferenciais provindas das leis de Newton para se prever, na prática, a posição dos objetos do Sistema Solar. Solução analítica sem aproximações só para o problema de dois corpos. Para um sistema de vários corpos, em particular um sistema planetário, com um corpo bem mais massivo e vários outros girando ao redor

daquela (estrela), um desenvolvimento matemático importante precisou se estabelecer. Nomes como Laplace, Lagrange e outros foram expoentes da mecânica celeste que se desenvolveu durante os séculos XVIII e XIX. Neste contexto, em meados do século XIX, a mecânica celeste estava madura para resolver um problema prático que aparecia. Quando se comparavam as observações de Urano com a sua localização prevista pela mecânica celeste, observava-se uma discrepância crescente. A explicação disso poderia ser alguma imprecisão na teoria de Newton, mas parecia bem mais razoável se supor que o inventário de planetas do Sistema Solar ainda não estivesse completo. Um desses matemáticos da época, Le Verrier, se dispôs a determinar os melhores parâmetros de um planeta desconhecido além de Urano que pudesse estar ocasionando as discrepâncias entre o observado e o previsto pela mecânica celeste. Uma vez determinado os parâmetros do tal planeta, Le Verrier enviou a informação a um observador, Johan Galle, que descobriu Netuno muito perto do previsto por Le Verrier na noite do mesmo dia em que Galle recebeu as previsões.

## **4.2 A Descoberta de Plutão**

A descoberta de Netuno foi um grande marco da ciência da época e uma confirmação da teoria de Newton. Já no século XX, depois de vários anos de observações de Netuno e com um maior arco de observação de Urano, começou-se a se especular se não haveria ainda um nono planeta além de Netuno. A coincidência entre as observações dos dois planetas mais exteriores e suas teorias não era perfeita, embora a discrepância, neste caso, estivesse próxima da magnitude dos erros aleatórios intrínsecos às observações. Ainda assim, o astrônomo Percival Lowell desenvolveu uma previsão de onde poderia estar o nono planeta em função dos erros que ele tomava como além de simplesmente intrínsecos às observações. Desta forma, tal como Le Verrier, Lowell também determinou uma região do céu onde poderia estar o planeta desconhecido. Clyde Tombaugh foi um jovem astrônomo que se dedicou a tentar descobrir o nono planeta a partir das previsões de Lowell. Muito mais demorada que a descoberta de Netuno, Tombaugh, ainda assim, descobriu um planeta, quase um ano depois de começar sua busca, cerca de  $6^\circ$  longe do centro da previsão.

### **4.2.1 A Decadência de Plutão**

No começo, a descoberta de Plutão foi considerada um feito semelhante à descoberta de Netuno. Porém, na medida em que o tempo passava, a maior parte das discrepâncias usadas para se determinar a posição de Plutão foi-se revelando como simples erros aleatórios intrínsecos às observações. Desta forma, a massa de Plutão necessária para explicar as discrepâncias foi também diminuindo. Em 1978, descobriu-se Caronte, o maior satélite de Plutão, que permitiu, através da terceira Lei de Kepler, se calcular a massa de Plutão. Descobriu-se, então, que essa massa era bem menor ainda que as previsões mais recentes na época, baseadas na perturbação de Plutão sobre Urano e Netuno. Em 2006, em uma reunião da União Astronômica Internacional, decidiu-se destituir Plutão do status de planeta. Plutão passou a ser denominado de planeta anão, como vários outros objetos do Sistema Solar, particularmente os trans-netunianos, como o próprio Plutão. Um planeta anão é definido como um objeto grande o suficiente para tomar a forma esférica pela sua auto gravidade mas não grande o suficiente para limpar de pequenos corpos, através da sua ação gravitacional, a região em torno de sua órbita.

### 4.3 O Planeta X

Em sendo a massa de Plutão determinada pela descoberta de seu satélite, bem menor do que o calculado para explicar as discrepâncias ainda existentes entre as observações de Urano e Netuno e suas teorias, parecia haver espaço para a existência de um outro planeta além de Plutão. Este planeta hipotético veio a ser conhecido como planeta X, em que o "X" significava não só incógnita mas também o numeral romano dez, referindo-se ao décimo planeta. Durante o década de 80 do século passado, houve uma nova corrida para a determinação da posição do planeta X. A Figura 2 mostra a região no plano onde seria mais provável se encontrar um planeta X (tirado da tese de doutorado do autor). Em 1993, E. Myles Standish, do "Jet Propulsion Laboratory", através da determinação de uma massa mais precisa para Netuno através da sonda Voyager, recalculou as posições de Urano e basicamente colocou em ruído branco as discrepâncias antes percebidas como possível erro sistemático entre as observações e as teorias de Urano e Netuno.

Uma busca semelhante sobre outro objeto de tamanho planetário ao redor do Sol apareceu em função da possibilidade do Sol possuir uma companheira. Esta denominação é dada a estrelas que giram em torno de outra maior, o que é bem comum na nossa Galáxia. A princípio, uma estrela companheira do tipo do Sol, mesmo que menor, foi descartada de imediato, já que seria a estrela mais brilhante observada no nosso céu. Porém, há estrelas menores de brilho mais tênue, como as chamadas anões marrons. Mesmo assim, estas têm uma forte emissão no infravermelho e também seriam hoje detectadas com alguma facilidade, portanto também foram descartadas como possíveis companheiras solares. Mas ainda restaria planetas-companheiras. Estes seriam objetos formados de forma idêntica às estrelas companheiras (ver abaixo seção 4.4.1) mas teriam uma massa planetária ao invés de estelar. Do ponto de vista observacional, é difícil descartar um planeta, mesmo algumas vezes maior que Júpiter, orbitando o Sol nos confins do Sistema Solar. Um planeta deste tipo poderia estar a dezenas ou centenas de milhares de unidades astronômicas distante do Sol, ou seja duas a quatro ordens de grandeza mais distantes do que Netuno.

Deve-se notar que a partir da perda do status de planeta por Plutão, o planeta desconhecido veio a ser denominado preferencialmente de planeta 9, já que o novo inventário de planetas do Sistema Solar passou a ter novamente apenas oito objetos.

### 4.4 Evidências recentes da existência de um nono planeta no Sistema Solar

Em existindo um planeta nos confins do Sistema Solar, como a sua influência seria sentida no Sistema Solar conhecido? A princípio, o que é previsível, essa influência seria sentida nos objetos mais distantes conhecidos do Sistema Solar, os trans-netunianos (TNO's, sigla em inglês para trans-Neptunian objects). Alguns trabalhos têm sido desenvolvidos neste sentido ultimamente. Entre os TNO's existe uma classe com muito poucos representantes chamados Sednoides, que leva o nome do primeiro desses objetos descoberto, Sedna. A peculiaridade deste objeto (e seus semelhantes) é que não só estão bastante distantes do Sol na média de suas órbitas, como todo TNO, mas também têm seu periélio bem além de Netuno. Para o periélio desses objetos se afastarem é necessário um potencial externo, o que um planeta distante poderia gerar. Porém, a mesma hipótese levantada para o afastamento do periélio do planeta 9 (ver na próxima seção) pode ser associada à própria formação dos Sednoides, ou seja, são objetos que teriam sido

espalhados pelos planetas em formação (planetesimais originais) e que tiveram seus periélios aumentados pelo potencial do aglomerado primitivo. Desta forma, a hipótese do aglomerado teve mais aceitação do que a do planeta 9.

Nos últimos três anos, no entanto, com a descoberta de novos TNO's distantes, pode-se verificar um novo sinal em suas órbitas. Órbitas são elipses assentadas num plano específico. Neste caso, podemos definir duas direções nas órbitas. A direção definida pelo eixo maior da elipse e a direção da interseção do plano orbital com um plano de referência (que pode ser por exemplo o plano invariante do Sistema Solar). Essas duas direções variam no tempo, devido à influência gravitacional dos vários objetos do Sistema Solar. A velocidade de precessão dessas duas direções dependem fortemente do semieixo maior das órbitas. Desta forma, num dado instante, órbitas com semieixos maiores (e outros elementos orbitais) distintos vão apresentar as direções acima definidas totalmente aleatórias entre  $0^\circ$  e  $360^\circ$ . O sinal observado nos TNO's distantes é uma aglomeração dessas direções em torno de uma direção preferencial. A probabilidade disso acontecer por acaso é baixíssima (menor que 0.1%) se apenas os objetos conhecidos do Sistema Solar são considerados. Por outro lado, a presença de um planeta distante pode induzir essa aglomeração das direções das órbitas dos TNO's distantes. Embora algumas outras teorias tenham sido apresentadas para possivelmente explicar a tal aglomeração, nenhuma delas tem a mesma capacidade explicativa do que um planeta desconhecido nos confins do Sistema Solar.

O sinal observado da possível presença do planeta 9 é o que chamamos de efeito secular. É como se fosse o efeito de órbitas sobre órbitas (como se a massa do planeta se distribuísse em torno da órbita do objeto e isso causasse um efeito médio nos outros objetos, ou seja, nas suas órbitas). É um efeito a longo prazo, diferentemente do efeito de Netuno sobre Urano que permitiu a descoberta daquele. Este efeito secular então permite-nos fazer projeções sobre a órbita do planeta 9, mas não sobre sua posição atual na órbita. Um trabalho foi feito neste sentido e a conclusão foi pouco reveladora. Praticamente se descartou a possibilidade do planeta 9 se localizar perto do periélio de sua órbita o que seria naturalmente excluído, pois a magnitude visual do planeta a esta distância do Sol não seria compatível com a sua não detecção até hoje. Programas de observações sistemáticas têm sido iniciados em vários observatórios do mundo para possivelmente detectar o planeta 9 nos próximos anos.

#### **4.4.1 A Origem do Planeta 9**

Podemos supor duas origens diferentes para o planeta 9. Fora de cogitação está a sua formação original onde ele se encontra presentemente. Não existiria densidade de massa suficiente nos confins do Sistema Solar para formar um planeta, muito menos com uma órbita excêntrica e inclinada. Os dois cenários mais aceitos para o implante do planeta 9 na órbita atual fazem uso de um conceito muito provável, qual seja, o de que o Sol nasceu dentro do que chamamos de aglomerado estelar. É como se observam hoje sistemas estelares no seu nascedouro. Desta forma, a formação planetária como descrita na seção acima deve ter ocorrido com o Sol dentro de um aglomerado primordial. Da mesma forma, outras estrelas do aglomerado devem ter passado por um processo semelhante de formação planetária. Nesta fase, em que planetas estão se formando e migrando pela influência do disco de gás é possível que muitos deles tenham encontros

próximos com outros maiores e sejam expulsos do sistema planetário<sup>6</sup>. Desta forma, o aglomerado estelar conterá estrelas, planetas, corpos menores e gás. Um fenômeno que pode acontecer dentro do aglomerado é a captura de estrelas menores por estrelas maiores. Isso acontece através de encontros próximos de três corpos, ou a partir da dissipação do gás do aglomerado. Este é o mecanismo mais aceito para a origem dos sistemas estelares duplos distantes (wide binaries). Os sistemas próximos são formados diretamente no colapso da nuvem que gerou a estrela, como citado acima. Da mesma forma, sistemas duplos distantes em que o menor objeto é um planeta podem ser formados. Isso seria uma das hipóteses para a implantação do planeta 9 em órbita em torno do Sol. Neste caso, o planeta 9 teria uma origem extrasolar.

O cenário mais aceito para o implante do planeta 9 em sua órbita atual também leva em conta o aglomerado primordial onde o Sol teria-se formado. Mas, neste caso, o planeta 9 seria um dos planetas formados no nosso sistema mas que, por encontro próximo com um gigante de gás, teve sua órbita alongada indo em sua máxima distância ao Sol para os confins do Sistema Solar. No entanto, o periélio do planeta continuaria passando perto do planeta gigante que jogou-o para longe. Este processo normalmente teria como fim ou a expulsão final do planeta em uma órbita aberta ou a sua colisão com um dos planetas ou com o Sol. Aí é que entra a influência do aglomerado original. O potencial do aglomerado induz a que o periélio da órbita do planeta no processo de ser jogado para fora aumente e se afaste do planeta que estaria interagindo com ele e, na verdade, de qualquer outro planeta que poderia afetar sua órbita posteriormente. Quando o aglomerado se dissipa, o planeta 9 ficaria então implantado nessa órbita distante e estável nos confins do Sistema Solar, à espera de sua descoberta.

## Agradecimentos

O autor é grato pelo convite feito a ele pelo Programa de Educação Tutorial para apresentar a palestra que originou o presente artigo na XI Semana da Física da Universidade de Brasília.

## References

- [1] Gomes 1987, Análise dos resíduos nas coordenadas de Urano e Netuno: estudo da hipótese do planeta X, tese de doutorado, Observatório Nacional, Rio de Janeiro, Brasil.
- [2] Lissauer 1993, Planet Formation, in *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* 31:129-74
- [3] Ward 1997, Protoplanet Migration by Nebula Tides, *Icarus* 126, 261-281.
- [4] Gomes et al. 2005, Origin of the cataclysmic Late Heavy Bombardment period of the terrestrial planets, *Nature* 435, 466-469.
- [5] Batygin and Brown 2016, Evidence for a Distant Giant Planet in the Solar System, *Astron. J.* 151, article 22.

---

<sup>6</sup>A troca de energia e momento angular entre os dois planetas que se encontram coloca um deles em uma órbita mais distante da estrela, podendo ser aberta, hiperbólica, caso em que o planeta flutuará livre dentro do aglomerado. Embora seja difícil de se observar estes planetas (denominados planetas errantes), existem evidências da observação de alguns poucos deles.

# Estudo sobre a elaboração de questões autocorretivas

PRISCILA BRANDÃO VIEIRA DO NORTE

ELIANA DOS REIS NUNES

Instituto de Física - Universidade de Brasília - UnB

Campus Universitário Darcy Ribeiro - Asa Norte

70919-970 Brasília / DF

## Resumo

*Esse trabalho é parte de uma pesquisa submetida como relatório final ao Programa de Extensão da Universidade de Brasília (UnB) em parceria com o estabelecimento de ensino Centro de Ensino Supletivo Asa Sul (CESAS), também em Brasília. O CESAS usa a Plataforma Moodle para ofertar a modalidade de Ensino à distância. Na Plataforma Moodle foi criada uma sala virtual para o Ensino de Física para Jovens e Adultos que cursam a primeira etapa do terceiro segmento da EJA. Na sala virtual estão publicados textos sobre o conteúdo de Cinemática e Dinâmica, simulações, experimentos, vídeos e testes online. Para os exercícios referentes ao conteúdo a ser trabalhado: Movimento Retilíneo Uniforme (MRU) e Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV) prepararam-se questões autocorretivas. A fim de prever as possíveis respostas fornecidas pelos estudantes da EJA, foi lançada uma pesquisa online com o intuito de perceber quais resoluções mais apareciam e qual o conhecimento que os respondentes possuíam em relação à Física.*

## 1 Introdução

A Educação de Jovens e Adultos (EJA) é uma alternativa que o Estado encontrou para trazer de volta à escola, jovens e adultos que desistiram de estudar, seja por motivos de saúde, financeiros, ou qualquer outro. Foi citada na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB 9.394/96), sendo ofertada para quem não possui mais idade para o ensino regular. A EJA deve respeitar as necessidades e diferenças de cada estudante para que ele permaneça na escola até que termine a educação básica.

### 1.1 Breve Histórico

Na época da colonização brasileira, existiam poucas escolas e estas eram apenas para a classe média e alta da sociedade. Não havia necessidade de uma educação para jovens e adultos, pois as classes pobres não tinham acesso à instrução escolar. Nesse período, a educação escolar teve três fases: predomínio da educação jesuítica, a reforma de Marques de Pombal e a vinda da corte portuguesa para o Brasil.

Segundo Miletto (2015), com os Jesuítas houve destaque na pregação da fé e no trabalho educativo. À medida que se ensinavam as primeiras letras, se ensinavam a doutrina católica e costumes europeus. Desde essa época já se falava em educar a população não-infantil, ou seja, adulta, pois havia a necessidade de que eles fossem catequizados. Com a expulsão dos Jesuítas, no século XVIII, houve a desorganização do ensino estabelecido no país, de forma que a educação de jovens e adultos foi totalmente esquecida, voltando a ser citada apenas na Constituição Imperial de 1824. A EJA aparece, também, na nova constituição de 1891, a primeira como República, mas sem melhorias. Em 1934, viu-se necessário que as pessoas fossem alfabetizadas, e a EJA foi incluída no Plano Nacional da Educação (PNE). Com a grande demanda, foi criado o Fundo Nacional do Ensino Primário, em 1942, onde 25% dos recursos da educação eram para ser investidos em jovens e adultos. Em 1967 foi criado o MOBREAL, e em 1971 o Ensino Supletivo, que foi regulamentado pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB 5.692/71).

Hoje, existem diversas modalidades de ensino de Jovens e Adultos, se adaptando às condições do estudante como incentivo para que ele não abandone os estudos.

## 1.2 Ambiente Virtual

De acordo com o Site Oficial e Blog do Centro de Ensino Supletivo Asa Sul (CESAS), em Brasília, o estabelecimento optou por ofertar todas as modalidades de ensino: presencial e à distância para a Educação de Jovens e Adultos.

Na Educação à distância – EaD, o estudante tem mais liberdade para completar o curso, dando possibilidades, também, de uma maior interação e socialização. O estabelecimento de ensino utiliza a plataforma Moodle para ministrar aulas, propor exercícios e avaliações.

Como o material colocado na plataforma Moodle precisa ser inédito, surgiu a ideia de criar um material para o conteúdo da 1ª Etapa do 3º Segmento (equivalente ao primeiro ano do Ensino Médio), composto por textos, simulações, vídeos de experimentos, questões autocorretivas e avaliativas.

Pelo fato de a EJA abranger muitos estudantes de perfis totalmente diferentes, não é fácil proporcionar a cada um deles uma atenção diferenciada. Por isso foi publicada uma pesquisa online, com questões que envolvessem o conteúdo de Movimento Retilíneo Uniforme (MRU) e Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV) para alcançar o máximo de resoluções possíveis. Os dados coletados eletronicamente foram analisados qualitativa e quantitativamente, mantendo os aspectos éticos que envolvem a pesquisa com seres humanos.

## 2 Metodologia

As questões aplicadas via plataforma Moodle devem ser autocorretivas, ou seja, o estudante deve ter o gabarito da questão junto com a justificativa do erro ou do acerto logo quando termina o exercício.

Entender como cada estudante vai responder uma questão pode ser muito complicado. Para tentar prever a resposta de pessoas que não cursam a área de ciências da natureza e matemática, mas têm um conhecimento prévio sobre o conteúdo, foi aplicado um questionário online via Google Forms dividido em duas partes. A primeira parte continha questões necessárias para traçar um perfil do respondente

como gênero, idade, grau de escolaridade e profissão. A segunda parte do questionário tinha como objetivo identificar as resoluções possíveis de duas questões sobre conteúdos de Cinemática MRU e MRUV. Conteúdo este visto no primeiro ano do Ensino Médio.

A seguir, apresentam-se as questões aplicadas com o objetivo de coletar as diferentes respostas que podem aparecer e entender como o conhecimento prévio do conteúdo influencia na resposta dos pesquisados e, posteriormente, na resposta dos alunos da EJA.

1) (UFMG - ADAPTADA) João está viajando de sua cidade para uma cidade próxima a uma velocidade constante de 80 km/h. Num determinado instante  $t$ , o trânsito começa a ficar engarrafado por conta de um acidente, e ele precisa diminuir sua velocidade para 20 km/h. Depois de uma hora, ele consegue aumentar a velocidade, do seu carro, para 30 km/h e permanecer, com essa velocidade, por mais duas horas. Depois ele sai do engarrafamento e volta para sua velocidade inicial continuando sua viagem até chegar ao seu destino. Qual a velocidade média do carro de João durante o engarrafamento em km/h? (Obs.: responda com até duas casas decimais)

2) Ao lançarem novos modelos de carro, revistas especializadas realizam vários testes de desempenho, dentre eles o de aceleração (aceleração de 0 a 100 km/h). Nesse teste um piloto acelera o carro de modo a obter o melhor desempenho, cobrindo uma distância de 1.000 m no menor tempo possível. A cada passagem são registrados os tempos de aceleração, de 0 a 100 km/h e a distância de 0 a 1.000 m. Uma determinada revista decidiu fazer esse teste para descobrir em quanto tempo um determinado carro consegue chegar a 90 km/h. (ATENÇÃO À CONVERSÃO DE UNIDADES. FORNEÇA SUAS RESPOSTAS NO SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES)

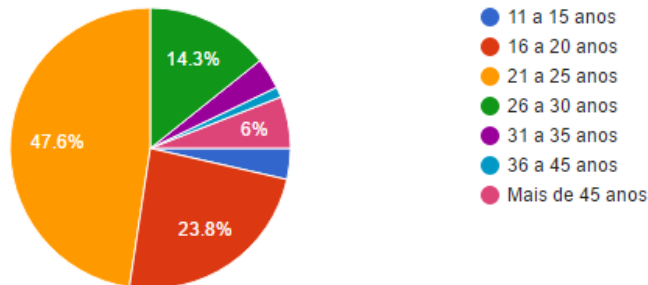
a) Para que o piloto alcance a velocidade de 90 km/h em 10s, qual deve ser sua aceleração?

b) E qual é a distância percorrida por ele nesses 10s?

### 3 Resultados

O questionário online obteve um total de 84 respostas. As cinco primeiras perguntas que traçavam um perfil do respondente apresentaram que 60,7% dos respondentes foram do sexo masculino e 39,3% do sexo feminino. Quanto à idade, a maioria dos respondentes possuem entre 16 e 30 anos como mostrado no gráfico 1.

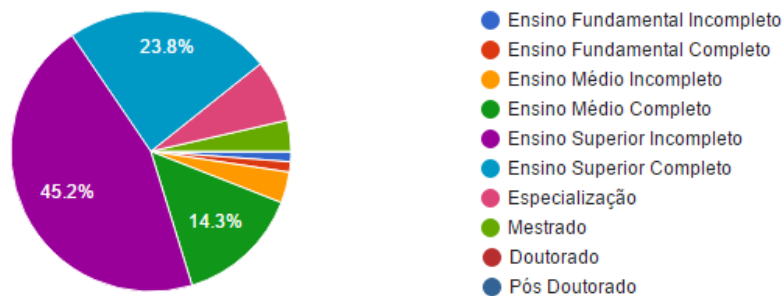
IDADE (84 respostas)



**Figura 1:** Idade dos entrevistados.

Quanto à escolaridade, a maioria dos respondentes tem nível superior incompleto, o que se relaciona com a faixa de idade em que se encontra a maior parte dos pesquisados, como apresentado no gráfico 2.

Escolaridade (84 respostas)

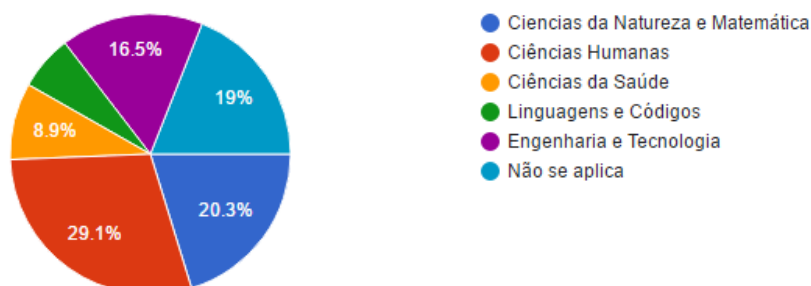


**Figura 2:** Escolaridade dos entrevistados.

Podemos notar ainda pelo gráfico 2 que foram poucas, ou nenhuma, as respostas de Doutores, Pós Doutores, Especializados e que não possuíam Ensino Fundamental.

A quarta questão estava relacionada com a área de atuação dos respondentes. Como mostrado no gráfico 3, a maioria dos pesquisados pertencem à área de Ciências Humanas, o que é interessante para a análise das respostas das questões aplicadas.

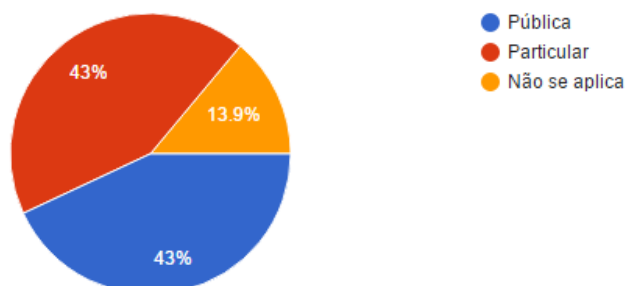
Se cursou ensino superior, Qual a sua área de Atuação (79 respostas)



**Figura 3:** Área de atuação dos entrevistados.

A última questão da primeira parte do questionário solicitava a instituição onde o respondente cursava ou cursou o Ensino Superior. O gráfico 4 apresenta os dados coletados.

Instituição Onde cursou o Nível Superior (79 respostas)



**Figura 4:** Tipo de instituição dos entrevistados.

Quase todas as respostas obtidas são de moradores de Brasília, Distrito Federal, com alguns respondentes tendo cursado o nível superior em outro estado.

Na análise da segunda parte do questionário online obteve-se:

a) A primeira questão versava sobre o Movimento Retilíneo Uniforme (MRU) e testava o conhecimento sobre velocidade média. A tabela 1 apresenta as 82 respostas obtidas. A resposta correta à questão era 26,67 km/h.

Respostas corretas	Respostas parcialmente corretas	Respostas incorretas
17	17	48

**Tabela 1:** Distribuição das respostas à questão 1.

b) A segunda questão era sobre Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV), em que o primeiro item julgava conhecimentos sobre aceleração. A tabela 2 apresenta as 77 respostas obtidas. A resposta correta à questão 2 (item 1) era  $2,5 \text{ m/s}^2$ .

Respostas corretas	Respostas parcialmente corretas	Respostas incorretas
15	16	46

**Tabela 2:** Distribuição das respostas à questão 2, item 1.

c) O segundo item da questão 2 julgava conhecimentos sobre aceleração. A tabela 3 apresenta as 76 respostas obtidas. A resposta correta à questão 2 (item 2) era 125 m.

Respostas corretas	Respostas parcialmente corretas	Respostas incorretas
18	9	49

**Tabela 3:** Distribuição das respostas à questão 2, item 2.

Como a primeira questão do questionário exigia mais conhecimento vivencial do que a teoria propriamente dita, o índice de acertos foi aceitável, 41,46%, mas ainda abaixo da média e do esperado, considerando acertos parciais e totais.

O primeiro item da segunda questão exigia um pouco mais de habilidade. Obteve-se 40,26% de acertos, tendo muitos erros de conversão de unidades de medida. Já no segundo item, como exigia que o conteúdo tivesse sido estudado, pois se tratava da equação horária do movimento, apenas 35,53% dos participantes acertaram a questão.

## 4 Conclusão

O erro mais comum nas respostas foi o de arredondamento e falta de unidade de medida. Houve muitos erros de conversão de unidade e desatenção, como, por exemplo, colocar a unidade de aceleração como metros por segundo. Foi possível perceber, na primeira questão, que muitos participantes encontraram 40 km/h como velocidade média, o que significa que, para eles, velocidade média é dividir a maior velocidade que o carro chegou por dois. Para outros, a velocidade média é a velocidade maior menos a velocidade menor dividida por 2, não levando em consideração o tempo de engarrafamento. Na segunda questão, a maior parte dos erros ocorreu por não transformarem a velocidade do carro para metros por segundo, alguns apenas acharam a velocidade, e não a aceleração e muitos não colocaram unidades corretas. Na segunda parte da questão, os entrevistados queriam utilizar todas as informações dadas no enunciado, o que induzia ao erro. Outros não faziam noção de como se achava a distância percorrida, e deixaram em branco. Mais uma vez, falta de leitura e atenção também foram responsáveis pelas respostas erradas e muitas não continham unidade de distância.

Com as respostas coletadas, será possível a aplicação de questões autocorretivas no Moodle da Instituição CESAS, para fazer a avaliação dos estudantes, como, também, a preparação de materiais direcionados a sanarem esses erros, para que diminua a incidência dos mesmos.

## Referências

- [1] BLOG DO CESAS. Disponível em <<http://ejaeadcesas.blogspot.com.br/>> Acesso em: junho de 2016.
- [2] MILETTI, R. Usando projetos de trabalhos na educação de jovens e adultos: um estudo de caso para a 3ª etapa do 3º segmento. Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília; 2015.
- [3] SÍTIO OFICIAL DO CESAS. Disponível em <<http://cesas.se.df.gov.br/ead>> Acesso em: junho de 2016.

# Física e Música: A desafinada história da consonância

ANDRÉ LUÍS MIRANDA DE BARCELLOS COELHO

Secretaria de Educação do Distrito Federal - SEDF

## Resumo

*Neste pequeno trabalho, evidencio algumas das principais contribuições dadas, desde Pitágoras até os dias de hoje, para a conceituação de consonância. Esse é um conceito central em música e sobre ele orbitam questões, tanto de natureza pragmática quanto epistemológica, que precisaram ser resolvidas de uma maneira ou de outra. Na antiguidade clássica, esse conceito estava fortemente atrelado à concepção de Cosmos que vem sendo progressivamente deteriorada, ao longo dos últimos dois milênios. Novas evidências apontam, por exemplo, para a necessidade de se levar em conta fatores sociais e linguísticos para compreender a preferência de determinado grupo de pessoas por intervalos musicais específicos em detrimento de outros.*

Keywords: Física e Música, Consonância, História.

## 1 Introdução

Consonância é um conceito central em música. É a partir de sons considerados consonantes que se estabelecem as combinações e intervalos usados para estruturá-la. Pitágoras, por exemplo, construiu uma escala musical - que alicerçou o desenvolvimento da música ocidental - baseado em sons que considerava consonantes. Ao longo do desenvolvimento da música européia, percebeu-se que a numerologia pitagórica não era o suficiente para determinar, de maneira inequívoca, quais combinações sonoras são mais ou menos consonantes, colocando em debate os fundamentos da música ocidental.

Músicos, teóricos da música e diversos notáveis físicos como Galileu, Huygens, d'Alambert, Bernoulli, Fourier, Euler e Helmholtz participaram desse debate. A partir do século XVI, o problema do temperamento das escalas musicais - que, em síntese, é o problema de conceituar consonância - foi o principal objeto de reflexão e trabalho desses exímios pensadores. Já em meados do século XX, avanços na área da otologia revelaram que o funcionamento da audição humana, mais especificamente do ouvido interno, poderiam apontar uma causa biológica para preferência de determinados intervalos musicais em detrimento de outros. Nas últimas décadas, alguns resultados sugerem que a percepção de consonância pode ter também uma forte contribuição social atrelada, principalmente, com a linguagem falada.

## 2 De Pitágoras a Kepler: a doutrina da Harmonia das Esferas

Tudo o que sabemos sobre Pitágoras (cerca de 500 a.C.) foi escrito por seus discípulos. Toda a sua ontologia está fundamentada na crença de que o princípio fundamental de todas as coisas é o *número/logos*. A escola pitagórica fundamentava não apenas uma visão naturalista (materialista) sobre esse princípio, mas também uma percepção metafísica associada aos números (POLITO e OLAVO, 2014). Ou seja, para os pitagóricos os números constituíam os elementos básicos da construção do mundo material, além de manifestar ordem, harmonia e perfeição em um sentido amplo e, até, cosmogônico. Isso dito, a música seria a aplicação da aritmética aos sons<sup>1</sup>.

Há diversas versões sobre como Pitágoras estrutura o argumento da construção das escalas musicais, porém o que há de mais confiável figura no *Sectio Canonis* - livro atribuído a Euclides (cerca de 300 a.C.). Nele, o autor explica que Pitágoras utiliza um monocórdio (instrumento que se constituía de uma corda fixa nas extremidades e um cavalete móvel capaz de alterar o tamanho da corda vibrante) para determinar os intervalos mais consonantes e, partindo deles, definir um conjunto de símbolos que devem ser usados para representar os sons musicais. Pitágoras, conta Euclides, elege como mais consonantes os sons emitidos pela corda em três posições para o cavalete móvel, definindo assim três diferentes comprimentos de corda vibrante, correspondentes a um  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$  e  $\frac{3}{4}$  da extensão total da corda (PARKER, 2010). É interessante notar que essas frações também compõem a descrição da geometria pitagórica de um cubo, revelando a já citada busca por uma lei única que estruturaria a natureza.

Essa natureza de raciocínio conduziu a civilização clássica a uma doutrina conhecida como *Harmonia das Esferas*. Nela, descrevendo grosseiramente, é postulado que há harmonia perfeita entre o microcosmos e o macrocosmos<sup>2</sup>. Foi ao redor dessa crença que articulou-se toda a teoria natural das escolas clássicas, cada uma com suas particularidades, evidentemente. Platão, por exemplo, ao lançar mão dos quatro elementos de Empédocles e associá-los a sólidos regulares convexos, define uma harmonia puramente matemática, e não musical como em Pitágoras.

Já na idade média (do século V ao XV d.C.), a divisão pitagórica das disciplinas numéricas dá origem ao chamado *Quadrivium* (aritmética, geometria, astronomia e música) que, associado ao *Trivium* (lógica, gramática e retórica), constituíam o *Currículum* (conjunto de disciplinas básicas que eram ensinadas nas universidades medievais, também conhecidas como Artes Preparatórias ou Artes Liberais). Segundo Polito, 2015:

“A noção de harmonia era fundamental no cosmos platônico e prosperaria também entre os neoplatônicos. Esteve eclipsada pelo aristotelismo por quase dez séculos, mas retornaria com força surpreendente no Renascimento, vindo a desempenhar um papel crucial durante a Revolução Científica, principalmente com Copérnico, Bruno e Kepler”.

<sup>1</sup>Muito embora, para diversos autores como Rodrigues (1999), a música tenha desempenhado um papel importante no desenvolvimento da matemática pura da escola pitagórica.

<sup>2</sup>Cosmos é um conceito inaugurado por Pitágoras, e pode ser entendido como sinônimo de ordem, harmonia ou organização, mas em um nível alto de complexidade. Ele abrange desde o microcosmos até o macrocosmos. Microcosmos foi entendido na antiguidade clássica em acepções diferentes: para a escola estóica, por exemplo, esse termo foi utilizado diversas vezes como sinônimo de homem ou ainda mundo. Macrocosmos é sempre relacionado, na antiguidade, com a noção de Universo ou Mundo.

Formado por uma universidade medieval (a Universidade de Tubinga, na Alemanha), por volta de 1589, Johannes Kepler é um excelente exemplo dessa qualidade de formação. Reconhecido pelas notáveis contribuições para a astronomia, mas além disso - e talvez por sua intensa formação teológica cristã - ele se dedicou a relacionar a beleza e harmonia da música com suas descobertas astronômicas. Ele escreve em seu livro *Harmonia do Mundo* que “os modos ou tons musicais são reproduzidos de uma certa maneira nas extremidades dos movimentos planetários”. Neste livro, Kepler chega a atribuir a cada planeta uma voz (Mercúrio era soprano e Marte tenor, por exemplo) e relacionar as distâncias entre o sol e os planetas a intervalos musicais.

Kepler representa o cume do desenvolvimento da doutrina da *Harmonia das Esferas* em diversos sentidos (RODRIGUES, 1999). Destaca-se a já mencionada busca por relacionar a música com a astronomia e aritmética. Ao estabelecer essas relações, reforça-se a concepção que consonância é algo intrínseco ao mundo natural e, por isso, a preferência humana por alguns intervalos musicais em detrimento de outros.

### 3 Consonância como um fenômeno físico

Nesse contexto, uma pergunta que surge é: será que existe algum fenômeno físico que, comprovadamente, possa justificar a escolha de certos intervalos musicais como mais consonantes que outros? Sobre essa questão debruçaram-se físicos notáveis como Bernoulli, D’Alambert e Fourier. Este último elaborou uma sofisticada descrição conhecida como série harmônica. Nela, para uma corda de extremidades fixas como a de um monocórdio, os primeiros harmônicos - conjunto de ondas que obedecem às condições de contorno do sistema, ou seja, nas extremidades a amplitude da onda formada é sempre zero - coincidem exatamente com a corda oscilando em toda sua extensão (intervalo 1<sup>a</sup> justa), em dois segmentos (intervalo de 8<sup>o</sup> justa), em três segmentos (intervalo de 5<sup>o</sup> justa) e em quatro segmentos (intervalo de 4<sup>o</sup> justa). Em suma, a consonância verificada nos intervalos pitagóricos se deve ao fato de que eles representam os menores harmônicos da série harmônica e, por isso, são percebidos naturalmente como consonantes. Essa hipótese de naturalidade da consonância, ou seja, que o reconhecimento de intervalos musicais como consonantes é algo intrínseco ao desenvolvimento humano coleciona diversas contradições, ao longo das últimas décadas, e segue inconsistente com algumas novas evidências no campo da sociologia musical (CAMPOS, 2007), otologia e fisiologia da fala (BOWLING, 2015).

### 4 As dissonâncias geradas pela Harmonia das Esferas

A escala musical pitagórica (conjunto de relações usadas para estruturar os sons musicais) foi construída a partir de intervalos de quintas justas em um procedimento conhecido como ciclo das quintas (no trabalho de JACHELLI, (2010) e MED, (1996) se encontra uma descrição completa desse procedimento). Porém são perpetuadas, a cada ciclo, distorções (ou dissonâncias) que são verificadas nos intervalos de oitavas justas como mostrado na tabela 1. Vale ressaltar a semelhança desse problema com o da construção de calendários que, assim como o ciclo das quintas, perpetuam erros a cada ciclo completo (RODRIGUES, 1999). Para os calendários, a solução adotada foram os anos bissextos. Na música, a solução foram os

Frequência	Nota musical
$f_0$	<b>Dó 1</b>
$\frac{3}{2}f_0$	<b>Sol 1</b>
$\frac{9}{8}f_0$	<b>Ré 1</b>
...	...
$\frac{531441}{524288}f_0$	<b>Dó 1 + Coma</b>

**Tabela 1:** A cada incremento de um intervalo de quinta justa, multiplica-se a frequência por um fator  $3/2$ . Caso algum incremento faça com que a frequência ultrapasse o dobro da frequência fundamental (atingindo assim a próxima oitava), divide-se por um fator 2 a fim de “acomodar” a nota dentro da mesma oitava. Dessa forma, pretende-se representar a escala cromática (todos os símbolos de sons musicais possíveis dentro de uma oitava). Contudo, verifica-se que a cada ciclo completo a frequência fundamental desloca-se, ainda que pouco, para um valor mais alto de frequência. Essa pequena diferença é conhecida como Coma Pitagórico. Encontra-se uma descrição completa desse procedimento a partir da página 80 do livro de Barry Parker, *Good Vibration* (PARKER, 2010).

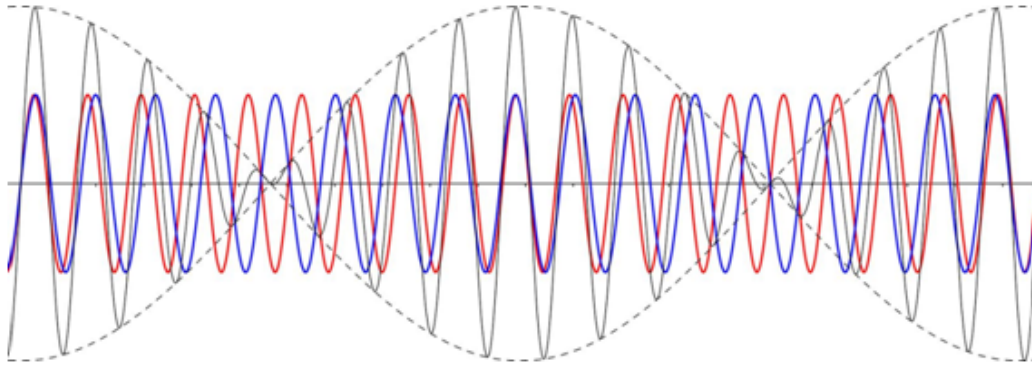
temperamentos (alongar, encurtar ou arredondar intervalos a fim de “fechar” o ciclo das quintas) das escalas musicais.

Com o desenvolvimento da engenharia de instrumentos musicais que começaram a exigir a representação de novas oitavas – e, portanto, completar novos ciclos de quintas – essas distorções começam a ser um entrave prático, para além da mera problematização conceitual.

## 5 A hipótese de Hermann von Helmholtz

O problema do ciclo das quintas foi objeto de reflexão e trabalho de um conjunto ilustre de físicos que incluía Kepler, Descartes e Galileu Galilei (que era filho de maestro, diga-se). Christiaan Huygens (1629 - 1695 d.C.), por exemplo, utilizando logaritmos propôs a divisão de uma oitava em 31 intervalos iguais. Por problemas de ordem prática, essa proposição não pôde ser adotada na notação musical.

O temperamento de escalas e, por conseguinte, o conceito de consonância é um tema tão intrigante que até o egrégio matemático Leonhard Euler (1707 - 1783 d.C.) se dedicou a ele. Ele construiu uma interessante equação matemática para medir o grau de consonância de um intervalo, levando em conta que quanto menor for a fração representativa desse, maior seu grau de consonância. O renomado físico alemão Hermann von Helmholtz (1821 - 1894) merece destaque nesse cenário por propor uma importante hipótese em relação a consonância (ela, por exemplo, possibilitou descobertas importantes, anos mais tarde, no campo da audição humana) (BOWLING, 2015). Ele enuncia em seu trabalho “Die Lehre von den Tonempfindungen” (em tradução livre: nas sensações dos tons), a hipótese de que a percepção de dissonância é dada por conta da modulação da amplitude da onda. Quanto maior for a flutuação (quanto mais próximo de um padrão de batimento) maior é a sensação de dissonância (cf. Figura 1).



**Figura 1:** Ao se interferirem duas ondas com frequências próximas (traços azul e vermelho na figura), resulta-se um padrão conhecido como batimento (pontilhado em preto na figura). Figura retirada do trabalho de Lago (2015).

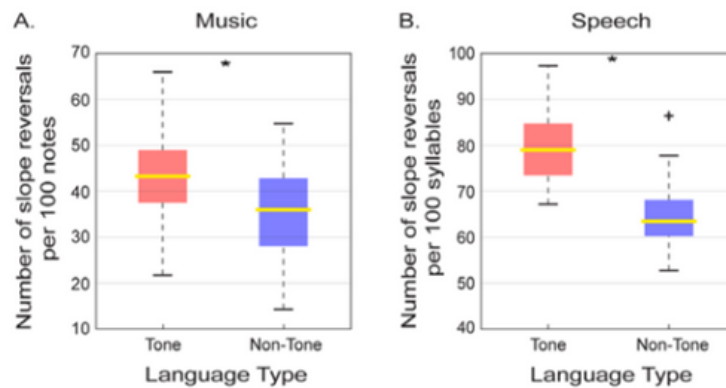
## 6 Consonância como um fenômeno biológico

Corroborando a hipótese de Helmholtz, há diversos estudos que apontam para uma causa biológica da dissonância. O trabalho de Georg von Békésy (VON BÉKÉSY, 1960), já no século XX, merece destaque por sua descrição do funcionamento da membrana basilar (estrutura do ouvido interno). Em seu trabalho, ele descreve um mecanismo biológico na membrana basilar capaz de justificar a percepção de sons dissonantes. Em síntese, por conta da densidade não homogênea da membrana, para cada frequência há um pico na amplitude da onda propagante em uma região diferente. Como esse pico não é discreto, é possível que haja uma intersecção entre dois picos de amplitude (isso só acontece quando os sons em questão têm frequências muito próximas). Quando há sobreposição, o sinal nervoso que é encaminhado para o cérebro é “confuso”, o que conduz à sensação de desagradado. Uma descrição mais completa do funcionamento da audição humana, em especial o da membrana basilar, descrevendo as contribuições de Helmholtz e Békésy, se encontra no livro *Good Vibration* de Parker (2010).

## 7 Considerações finais

A conclusão direta desse tipo de abordagem é que, se a consonância tem causas puramente biológicas, então todos os seres humanos dotados das mesmas estruturas funcionais responsáveis pela audição reconheceriam os mesmos intervalos como consonantes, o que não é o caso. Além disso, definir consonância como a falta de dissonância parece ser insuficiente para descrever satisfatoriamente alguns fenômenos musicais.

Estudos das últimas duas décadas apontam para um importante componente na construção da percepção de consonância: a linguagem falada. Shui’ er Han et al (2011) demonstra que a música de falantes de línguas tonais (como o mandarim) tendem a reconhecer consonância em alguns intervalos reconhecidamente dissonantes para os falantes de línguas não tonais (como o português), vide Figura 2. Se essa hipótese estiver correta, a música, como fenômeno, deve ser abordada de maneira muito mais



**Figura 2:** *Compara-se o número de intervalos utilizados na música em comparação a linguagem falada entre falantes de línguas tonais e não tonais. Esta figura consta no trabalho de Shui' er Han et al (2011).*

interdisciplinar, considerando não só seu caráter matemático, físico e biológico, mas também sua forte componente sociocultural.

## 8 Agradecimentos

Agradeço à Universidade de Brasília a oportunidade de compartilhar e expor esse trabalho que tive tanto prazer em desenvolver. Reafirmo a imensa gratidão que tenho pela instituição e seus profissionais que me formaram ao longo dos últimos sete anos, em especial meu orientador de mestrado, professor Antony Marco Mota Polito. Agradeço também aos organizadores e executores da XI Semana da Física pelo inestimável apoio, organização e atenção.

## Referências

- [1] POLITO, Antony M. M., and Olavo L.S.F. "A filosofia da natureza dos Pré-Socráticos." Caderno Brasileiro de Ensino de Física, v. 30, n. 2, p. 323-361. 2014.
- [2] RODRIGUES, José Francisco. "A matemática e a música." Lisboa, PT 200, 1999.
- [3] JACHELLI, Thiago. Afinação e temperamento desigual no barroco. Monografia de conclusão de curso. Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2010.
- [4] BOWLING, Daniel L., and Dale Purves. A biological rationale for musical consonance. Proceedings of the National Academy of Sciences 112.36, 2015.
- [5] LAGO, BL. A guitarra como um instrumento para o ensino de física ondulatória. Rev. Bras. Ensino Fís.[online] 37.1, 2015.

- [6] CAMPOS, Luís Melo, A música e os músicos como problema sociológico, *Revista Crítica de Ciências Sociais*, 78, 71-94, 2007.
- [7] MED, Bohumil. *Teoria da música*. Musimed, 1996.
- [8] VON BÉKÉSY, Georg. *Experiments in hearing*. Ed. Ernest Glen Wever. Vol. 8. New York: McGraw-Hill, 1960.
- [9] HAN, Shui'er, et al. Co-variation of tonality in the music and speech of different cultures. *PLoS One* 6.5 e20160, 2011.
- [10] PARKER, Barry. *Good vibrations: the physics of music*. JHU Press, 2010.

# Freezing Suppression in Confined Water

TÁSSYLLA O. FONSECA

PATRICIA TERNES

Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul,  
CEP 91501-970 Porto Alegre, RS, Brazil.

ALAN B. DE OLIVEIRA

Departamento de Física, Universidade Federal de Ouro Preto,  
CEP 35400-000 Ouro Preto, MG, Brazil.

MARCIA C. BARBOSA

Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul,  
CEP 91501-970 Porto Alegre, RS, Brazil.

## Abstract

*We study confined water in cellulose matrix through Monte Carlo simulations. To determine the crystal-fluid transition temperature behavior for confined water, we vary the diameter and length of channel, and the nature of wall-water interaction. Our model presents a transition temperature dependent with the channel diameter and independent of channel length. The transition temperature is larger for hydrophobic walls than hydrophilic walls. In the hydrophilic case one fluid layer in wall-water interface is observed. The transition temperature also depends of water latent heat value. In hydrophobic systems the transition temperatures reaching the bulk water transition temperature, for higher latent heat used. In all situations analyzed the confined water transition temperature is lower than the bulk water transition value.*

## 1 Introduction

Water has very peculiar behaviors not observed in other liquids. For instance, the density at room pressure has a maximum at 4° C [1, 2, 3] while in most materials the density increases monotonically with the decrease of the temperature. In addition, between 0.1 MPa and 190 MPa water also exhibits an increase of compressibility [4, 5] and, at atmospheric pressure, an increase of isobaric heat capacity upon cooling. [6, 7] In addition to these thermodynamic anomalies water also presents an unusual behavior in its mobility. The diffusion coefficient that for normal liquids increases with the decrease of pressure, for water it has a maximum at 4° C for 1.5 atm. [3, 8]

The presence of the large increase in the response function led to the hypothesis of the existence of two liquid phases and a critical point. [9] Unfortunately this liquid-liquid coexistence is located at

the supercooled region beyond the line of homogeneous nucleation what makes the its experimental observation a challenge. In order to circumvent this inconvenience, experiments in confined water were performed. [10, 11] They showed that the large increase of the specific heat it is actually a peak that can be associated with the Widom line. This line is found [11] as the continuation of the liquid-liquid coexistence line beyond the critical point at the one phase region. [10, 11]

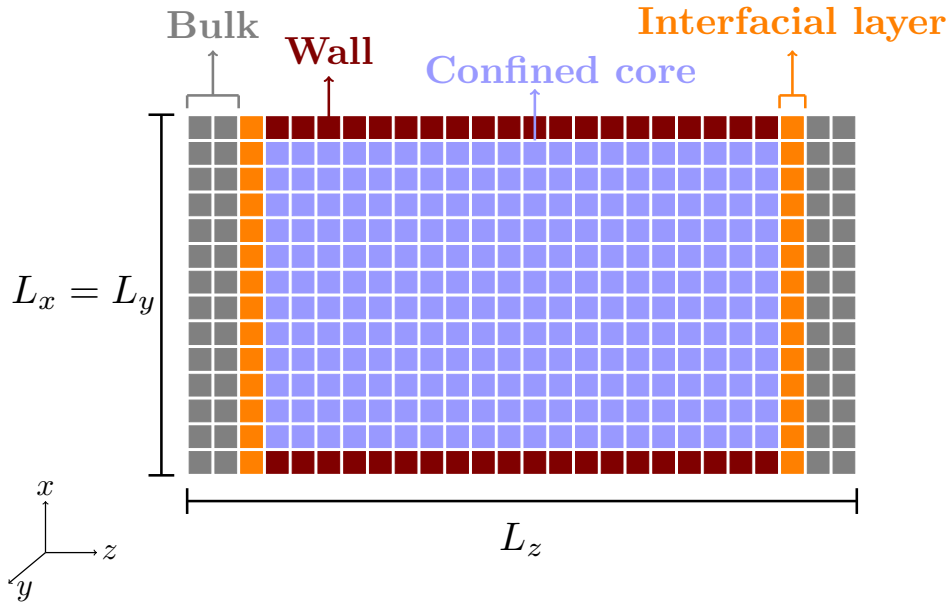
The drawback of experiments in nanoscale confinement is that the results obtained do not necessarily lead to conclusions at the bulk level. In fact new physical observations arise when studying confined systems. These new results are important for understanding a number of confined systems. One particular example is water confined in the cellulose matrix. There is a scientific and technological race for the commercial scale production of second generation ethanol. Second generation ethanol is produced from lignocellulosic biomass. Lignocellulosic biomass is the most abundant renewable biological resource on earth. [12, 13] This refers to components such as: sugarcane straw, sugarcane bagasse, wood, components of corn, cotton, among others. [14, 15] The production of ethanol from cellulose can be done using “wastes” that are discarded by industry. So, it is possible increases ethanol production without increasing the extent of cultivated land. [16]

The conversion of biomass to ethanol has been considered a promising alternative to meet global demand for fuels. [12] There are technologies available for pulp processing, but most of them face technical or economic difficulties. [12, 14, 17, 18] Starting from the lignocellulosic biomass, there will be three processes until the ethanol is obtained. The first process is the pre-treatment where there extraction of cellulose from the basic components that make up the biomass, cellulose, lignin and hemicellulose. After the initial separation, the pulp undergoes a hydrolysis step, which leads to their “breaking” into glucose molecules. Finally, through fermentation and distillation, the cellulosic ethanol is obtained. [19]

In biofuel production, one important step is the cellulose washing. In addition to being used to remove sugars, water is also an instrument to evaluate the structure of the cellulose matrix through a process of thermoporometry. [20, 21] This experimental method consists of immersing the cellulose in water at room temperature and freezing it. After removal of the bath, the water is heated slowly. It is noted in this process that the fusion occurs at a different temperatures than the bulk temperature. Then the question arises of how the change in the freezing of confined water depends in the confining geometry and particularly on the confining diameter. If this relation could be found a method for finding the distribution of sizes inside the celulose matrix could be established.

Experimental and computational studies of freezing in nanochannels suggest that the crystal-fluid transition temperature of confined water is related to the nature of confinement (hydrophobic or hydrophilic walls) and the degree of confinement (confining channel size) [22, 23, 24, 25, 26, 27] and that not all water present in the channel can be crystallized. In some confining geometries pre-melted water has been observed in nanochannels experiments such as calorimetry, nuclear magnetic resonance, neutron diffraction, X-ray and Raman. [22, 23, 28, 29] However, the clear relation between the presence of a pre-melted layer and a shift in the melting temperature of the confined water is still not established.

In order to understand how the transition temperature of the confined water depends on the nature of the confining wall and the confinement size, we propose a model of cellulose nanochannels for confinement. This lattice model incorporates the fusion/solidification process in an approximate way. We also verify the relation between water structure in contact with wall and the confinement.



**Figure 1:** Schematic representation of the  $xy$  plane cross-section of the system structure. Dark red sites represents the nanopore wall (solid), gray sites represents bulk water (fluid or crystal), blue sites represents the confined water (fluid or crystal) and orange sites represents the water in the interfacial layer (fluid or crystal) between the bulk and the confined water.

The remaining of this paper goes as follows. In the section II the model and the simulation details are presented, results are analyzed in the section III and section IV shows the conclusions.

## 2 Lattice model

The system is defined on a parallelepipedic lattice, with volume  $L_x^2 L_z$  which represents the confining geometry in contact with the bulk as illustrated in the Figure 1. In the channel two types of particles are present: the particles that make up the channel walls and the particles that represent the water. The channel ends in the  $z$  direction in one layer of interfacial water and two layers of water particles that represent the bulk water. All the sites inside the channel are either in the fluid or in the crystal state.

The state of the bulk water is fixed by the transition temperature,  $T_0$ . For  $T > T_0$  the bulk is in fluid state while for  $T < T_0$  the bulk is in crystal state. The bulk acts as a local field in the interfacial layer, influencing its state. The state of the interfacial layer and the water within the confined core are defined according to a Monte Carlo statistic. The energy difference if a selected site is changed from the fluid to the crystal phase is given by the following Monte Carlo energy gap [30]

$$\Delta E = L \left\{ \frac{T}{T_0} - 1 + \frac{1}{6} \Delta N_{cf} + W_c \Delta N \right\}, \quad (1)$$

where  $L$  is the bulk latent heat which in addition to taking into account the degrees of freedom of hydrogen bonds (internal targeting of molecules), also includes van der Waals intermolecular interactions.  $L$  is

the heat required in the bulk at  $T = T_0$  for the transition from the fluid to the crystal phase to occur.  $\Delta N_{cf} = N_{cf}^c - N_{cf}^f$  is the difference between the numbers of first neighbors in the fluid phase when the selected site is in the crystal phase,  $N_{cf}^c$ , and the number of first neighbors in the crystal phase when the selected site is in the fluid phase,  $N_{cf}^f$ .  $\Delta N_{cs} = N_{cs}^c - N_{cs}^f$  is the difference between the numbers of first neighbors which belong to the wall if the the selected site is in the crystal phase,  $N_{cs}^c$ , and the number of first neighbors in the wall when the selected site is in the fluid phase,  $N_{cs}^f$ .  $W_c$  is the water-wall interaction in units of latent heat.  $W_c \leq 0$  represents a hydrophobic wall and  $W_c > 0$  represents a hydrophilic wall.

In a typical bulk system, the crystal-fluid phase transition occurs when a crystal fragment of a certain critical size is formed and the volumetric energy of the crystal-crystal interactions of this fragment is less than the crystal-fluid interface. In a confined system, the interaction with the wall unbalances this competition between volume and surface, and the transition temperature changes. In the specific case of water, confinement has an additional effect. The hydrogen bonds are directional and the wall makes the formation of water-water bonds impossible. In some cases, the wall forms bonds with the water, thereby eliminating further formation of these bonds. The model used in this work is capable to describe the breakdown of water-water hydrogen bonds due the confinement and the formation of water-wall hydrogen bonds if the channel was hydrophilic.

Two different definitions of the density of the confined fluid water are employed. The total fluid density,  $\rho_{total}$ , includes all the water molecules in the fluid state divided by the total number of available sites. The central fluid density,  $\rho_{central}$  includes only the central water molecules in the fluid state divided by the total number of available sites. This density excludes the water molecules at the contact layer and the interfacial water. If all the sites are in the fluid state  $\rho_{total} = 1$  while if all the central sites are in the fluid state  $\rho_{central} = 1$ . Due to site conservation the densities of water in the crystal phase are  $1 - \rho_{total}$  and  $1 - \rho_{central}$ . In resume, the fluid densities are given by

$$\rho_{total} = \frac{N_f}{M} \quad \text{and} \quad \rho_{central} = \frac{N_f^c}{M^c}, \quad (2)$$

where  $N_f$  is the number of sites in the fluid state belonging to the confined core and  $M$  is the total number of confined core sites.  $N_f^c$  is the number of sites in the fluid state belonging to the confined core without the sites of contact layers, and  $M^c$  is the total number of confined core sites without contact layers.

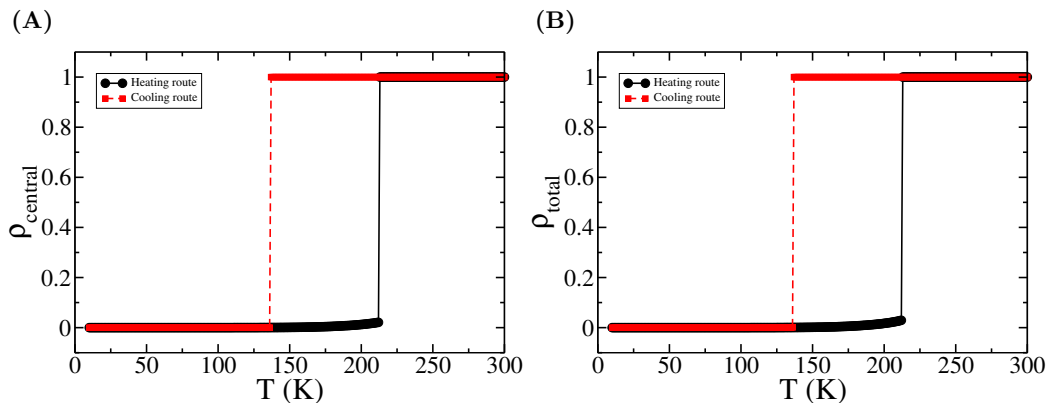
The evolution of the system was studied through Monte Carlo dynamics. We simulate the particles of the system inside a parallelepiped box in contact with a thermal bath at the temperature of  $T_0$ . The particles belonging to the bulk had their state varied in accordance with the temperature  $T$  in relation to  $T_0$ , equilibrium transition temperature of the bulk. The sites were maintained in the crystal state, when  $T < T_0$ , or in the state of fluid when  $T > T_0$ . We initiate the simulations with the confined particles plus the interfacial layer particles, between confined and bulk, in the crystal state, where  $T$  has an initial value below  $T_0$ , then the bulk also starts in the crystal state. We will vary the number of confined particles, from  $L_x = L_y = 5$  nm to  $L_x = L_y = 60$  nm, maintaining  $L_z = 13$  nm, in the case of simulations in which we wanted to observe the effect of the variation of the diameter of the nanopore at the confined water transition temperature. Another case where the effect of channel length variation on the confined water transition temperature was the interest, we have fixed  $L_x = L_y = 7$  nm and we vary  $L_z$ , from  $L_z = 7$  nm to  $L_z = 17$  nm. We use the latent heat of fusion,  $L$ , from 6,006 to 20 kJ/mol and degree of hydrophilicity,  $W_c$ ,

from 0 (hydrophobic) to 10. During our simulations, we varied the temperature from 10 K to 300 K in the heating route, and from 300 K to 10 K in the cooling route. The balancing counted for  $10^4$  steps from Monte Carlo. The number of uncorrelation steps between one measure and another was  $10^3$ . The number of measures taken was  $10^2$ .

### 3 Results

In order to understand the effects of the presence of the wall in the thermodynamic properties of the confined water, the fluid-crystal transition temperature is computed as follows. The bulk system is fixed at the crystal phase and the Monte Carlo simulations are performed at  $T < T_0$ . The temperature is then raised at small time steps. Then, simulations at high temperatures  $T > T_0$  in which the bulk water is in the fluid phase. Then the temperature is decreased also at small time steps.

Several parameter sets were tested: channel diameter,  $L_x$ , from 5 to 60 nm; latent heat of fusion,  $L$ , from 6.006 to 20 kJ/mol; and degree of hydrophilicity,  $W_c$ , from 0 (hydrophobic) to 10. The bulk water crystal-fluid transition temperature and the channel length were fixed in  $T_0 = 273.15$  K and  $L_z = 13$  nm, respectively, in all simulations.

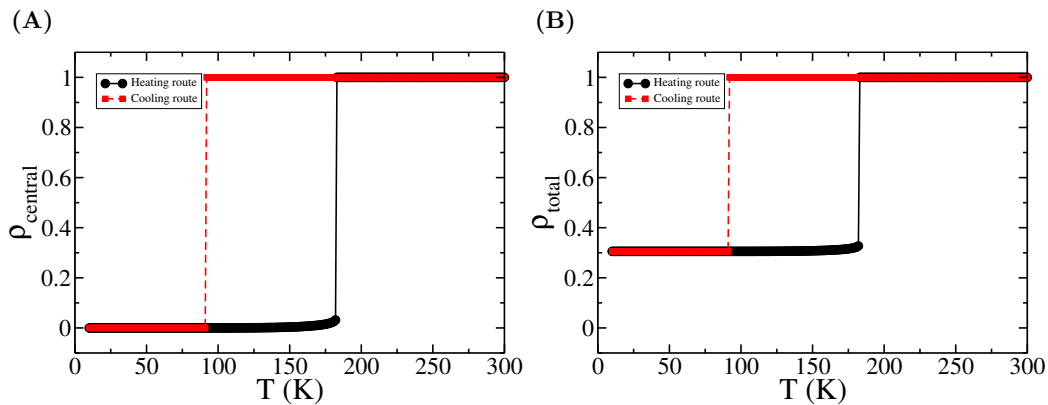


**Figure 2:** (A) Central ( $\rho_{central}$ ) and (b) Total Fluid Density ( $\rho_{total}$ ) versus temperature for  $L_x = L_y = 7$  nm,  $L_z = 13$  nm,  $W_c = 0$ , and  $L = 6.006$  kJ/mol. The black solid curves are the heating routes and the red dashed curve are the cooling routes.

The Figure 2 shows the of fluid water density versus temperature for a confined system with channel diameter of  $L_x = L_y = 7$  nm and channel length ]of  $L_z = 13$  nm, with water-wall interaction purely repulsive, that is, system hydrophobic  $W_c = 0$ , and latent heat of fusion,  $L = 6.006$  kJ/mol (this is the latent heat of the crystal-fluid transition of bulk water). [31]

Comparing central and the total density of water molecules in the fluid phase it is possible to identify that there is no significant difference between  $\rho_{total}$  and  $\rho_{central}$ , which indicates that the wall is not wetted by the water, in other words the water-wall contact layer are not in fluid state when the confined system freezes.[32] This result implies that, for this model, hydrophobic walls ( $W_c = 0$ ) do not suffer wettable.

The Figure 3 shows the water fluid density versus temperature for a confined system with dimensions of  $L_x = L_y = 7$  nm and  $L_z = 13$  nm, with hydrophilic wall,  $W_c = 3$ , and latent heat of fusion,  $L = 6.006$  kJ/mol. Comparing the central and the total densities we can see a clear distinction between hysteresis curves for the two types of density. While in (A) the heating route starts with fluid water density equal to zero, in (B) the heating route starts with the fluid water density at a non-zero value: 0.3056. This is due to the fact that  $\rho_{total}$  associates the formation of a fluid water layer between the channel walls and the frozen core within the channel. We further analyze other values of  $W_c$ , 1.35, 2.10, 4.05, 5.25, 6.60, 8.10 and 9.75. For all these values of  $W_c$ , both fluid water densities,  $\rho_{central}$  and  $\rho_{total}$ , behave similarly to  $W_c = 3$ .

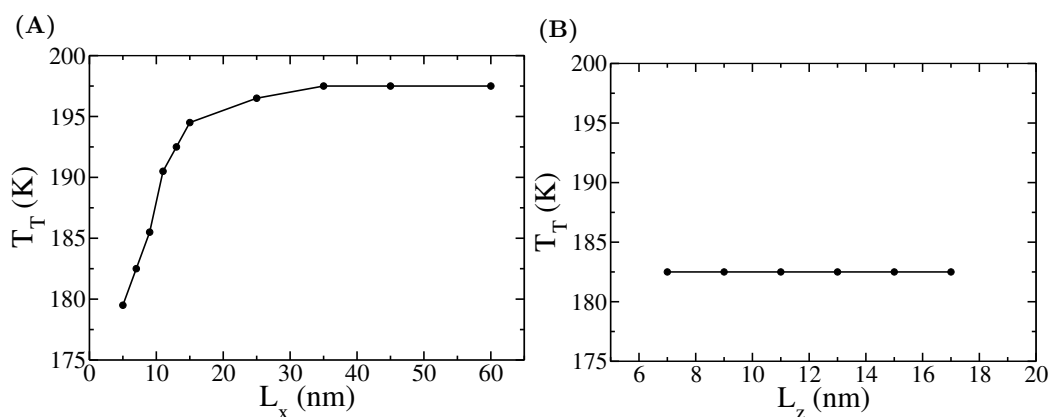


**Figure 3:** (A) Central ( $\rho_{central}$ ) and (b) Total Fluid Density ( $\rho_{total}$ ) versus temperature for  $L_x = L_y = 7$  nm,  $L_z = 13$  nm,  $W_c = 3$ , and  $L = 6.006$  kJ/mol. The black solid curves are the heating routes and the red dashed curve are the cooling routes.

In addition to the phase diagrams discussed above, we analyzed phase diagrams for all simulated parameters. We observed that crystal-fluid transition temperatures in the cooling route (red dashed curves in Figures 2 and 3) are independent of the lattice size, ie, it is a bulk stability limit. Therefore, we define the crystal-fluid transition temperature,  $T_T$ , as the transition temperature of the heating route (black solid curves in figures 2 and 3). We emphasize that this definition, although arbitrary, is coherent because we would like to explore the dependence of the variation and not the absolute value of the transition temperature with  $L_x = L_y$  e  $L_z$ .

The Figure 4 (A) shows the relation between transition temperature and the channel diameter for  $W_c = 3$ ,  $L = 6,006$  kJ/mol and  $L_z = 13$  nm. We observed that the transition temperature increases with the increase of the channel diameter, until reaches a saturation value for very large sizes. The transition temperature going from 179.5 K, for the smallest channel diameter ( $L_x = 5$  nm), to 197.5, for channel diameters greater than 30 nm. These values are always below the bulk water crystal-fluid transition temperature ( $T_0 = 273.15$  K). Other values of  $W_c$  were analyzed: 1.35, 2.10, 4.05, 5.25, 6.60, 8.10 and 9.75. In all situations the transition temperature  $T_T$  behaves similarly to  $W_c = 3$ : increases with the increase of the channel diameter, until reaches a saturation value, that is below the bulk transition temperature. The  $T_T$  will not be equal to  $T_0$ , even for the case where there wall is hydrophobic ( $W_c = 0$ ), since the confinement effect is still great and the latent heat used is still relatively low for this model. Therefore,

it is possible to affirm that the confinement of the water in parallelepiped channels causes a shift in the temperature of transition to temperatures below the bulk temperature transition.



**Figure 4:** Confined crystal-fluid transition temperature as a function of the channel diameter with  $L_z = 13$  nm (A); and crystal-fluid transition temperature as a function of the channel length with  $L_x = 7$  nm (B). In both cases,  $W_c = 3$  and  $L = 6,006$  kJ/mol.

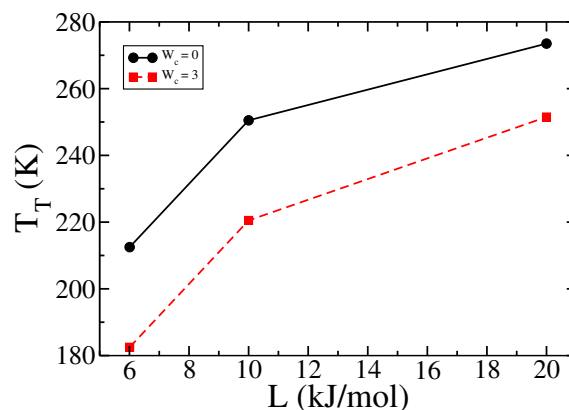
We also found that increasing the channel length, maintaining the channel diameter constant, has no influence on  $T_T$ . This result is illustrated in Figure 4(B). The justification for this behavior is that as the length of the channel grows, it approaches the thermodynamic limit. This favors the crystal-fluid transition at  $T_0$ . On the other hand, as the length of the channel increases, increase the interaction with the wall, which favors transitions to temperatures lower than  $T_0$ . These two effects cancel out, and the transition temperature remains constant with increasing channel length. This behavior was observed for all values of  $W_c$ ,  $L$  and  $L_x$  analyzed.

The Figure 5 shows the transition temperatures for the three latent heat values studied (6.006, 10 and 20 kJ/mol) with  $L_x = 7$  nm and  $L_z = 13$  nm. Black solid line is the result for hydrophobic case, and red dashed line is the result for one hydrophilic case ( $W_c = 3$ ). In both cases, the transition temperature increases with the latent heat of fusion. For the hydrophobic case, the transition temperatures range from 212.5 K for  $L = 6.006$  kJ/mol to 273.5 K for  $L = 10$  kJ/mol, reaching the bulk water transition temperature,  $T_0 = 275.15$  K. While for hydrophilic systems the transition temperature does not reach the value of bulk.

## 4 Conclusions

In this work we studied the dependence of crystal-fluid transition temperature of the water confined with the degree and the nature of confinement. The degree of confinement was varied through changes in channel diameter ( $L_x$ ) and channel length ( $L_z$ ). Hydrophobic and hydrophilic walls were simulated.

First we observed that the hydrophobic walls,  $W_c = 0$ , do not exhibit wetting, ie, do not form a layer of water, in fluid state, in contact with the wall, while in hydrophilic walls,  $W_c > 0$  the formation of a fluid



**Figure 5:** Confined water transition temperature,  $T_T$ (K), as a function of latent heat,  $L$ (kJ/mol), for (a)  $W_c = 0$  and (b)  $W_c = 3$  and system size equal to  $7 \times 7 \times 13$  nm.

layer at the wall occurs. This result is independent of channel diameter and length.

We also found that for fixed channel length, the transition temperature increases with the channel diameter, until reaches a saturation value. The crystal-fluid temperature transition for confined case were lower than the bulk case in all conditions analyzed. Already for fixed channel diameter, the transition temperature was independent of the channel length.

The study with different values of latent heat showed that transition temperature increases with latent heat. For hydrophobic systems the transition temperatures are larger than transition temperatures for hydrophilic systems. In addition, in the hydrophobic case, the transition temperature approaches to the bulk value for high values of latent heat. While for hydrophilic systems for none of the latent heat values worked, and for none system size, the transition temperature reaches the bulk value.

There is a decrease in the transition temperature with the confinement. The fluid state is more entropic than the crystal state, therefore fluid state exists at higher temperatures. When any form of disorder is introduced into the system, the fluid state is favored. This is the case observed for confined systems. The interaction with the wall causes a disorder in the hydrogen bonds, which leads to the formation of the fluid. This effect is somewhat attenuated for hydrophobic wall, because the wall in this case does not distinguish crystal state of fluid state, adding no disorder to the system. In the case of hydrophilic walls the fluid state is favored. This occurs because hydrophilic walls can make hydrogen bonds with water. To form a hydrogen bond between water-wall, a water-water hydrogen bond is break down. This process favors the fluid state and the system disorder, thereby lowering the crystal-fluid transition temperature.

We used some values of latent heat to try to adjust this parameter appropriately to the model used. Since the water in the lattice is not true water, the latent heat used could not be that of the crystal-fluid transition of the water. Besides the adjustment, the latent heat variation allowed to show that higher latent heat favors transition temperatures closer to the bulk value. This is justified because rising latent heat means that more energy is needed for a transition to occur. In short, this simple model was able to give an overview of the microscopic mechanisms that lead to confined water to form a film on the walls, and to a reduction in the crystal-fluid transition temperature due to confinement.

## References

- [1] R. Waler. *Essays of natural experiments*. Johnson Reprint, New York, 1964.
- [2] G. S. Kell. *J. Chem. Eng. Data*, 20:97, 1975.
- [3] C. A. Angell, E. D. Finch, L. A. Woolf, and P. Bach. *J. Chem. Phys.*, 65:3063, 1976.
- [4] R. J. Speedy and C. A. Angell. *J. Chem. Phys.*, 65:851, 1976.
- [5] H. Kanno and C. A. Angell. *J. Chem. Phys.*, 70:4008, 1979.
- [6] C. A. Angell, M. Oguni, and W. J. Sichina. *J. Phys. Chem.*, 86:998, 1982.
- [7] E. Tombari, C. Ferrari, and G. Salvetti. *Chem. Phys. Lett.*, 300:749, 1999.
- [8] F. X. Prielmeier, E. W. Lang, R. J. Speedy, and H.-D. Lüdemann. *Phys. Rev. Lett.*, 59:1128, 1987.
- [9] P. H. Poole, F. Sciortino, U. Essmann, and H. E. Stanley. *Nature (London)*, 360:324, 1992.
- [10] L. Liu, S.-H. Chen, A. Faraone, S.-W. Yen, and C.-Y. Mou. *Phys. Rev. Lett.*, 95:117802, 2005.
- [11] L. Xu, P. Kumar, S. V. Buldyrev, S.-H. Chen, P. Poole, F. Sciortino, and H. E. Stanley. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 102:16558, 2005.
- [12] F. A. Santos, J. H. de Queiróz, J. L. Colodette, S. A. Fernandes, V. M. Guimarães, and S. T. Rezende. *Quimica Nova*, 35:1004, 2012.
- [13] Y. P. Zhang and L. R. Lynd. *Biotechnology and bioengineering*, 88:797, 2004.
- [14] Y. Zheng, Z. Pan, R. Zhang, and D. Wang. *Applied Energy*, 86(11):2459, 2009.
- [15] M. Galbe and G. Zacchi. *Pretreatment of Lignocellulosic Materials for Efficient Bioethanol Production*, page 41. 2007.
- [16] F. Marques. *Pesquisa FAPESP*, 163:1620, 2009.
- [17] Y. Sun and J. Cheng. *Bioresource technology*, 83:1, 2002.
- [18] X. Zhao, L. Wang, and D. Liu. *Journal of chemical technology and biotechnology*, 82:1115, 2007.
- [19] M. de Oliveira. *Pesquisa FAPESP*, 200:86, 2012.
- [20] O. V. Petrov and I. Furó. *Prog. Nucl. Magn. Reson. Spectrosc.*, 54:97, 2009.
- [21] C. Driemeier, F. M. Mendes, and M. M. Oliveira. *Cellulose*, 19:1051, 2012.
- [22] G. H Findenegg, S. Jähnert, D. Akcakayiran, and A. Schreiber. *ChemPhysChem*, 9:2651, 2008.

- [23] J. T. Allenhnert, S., F. V. Chavez, G. E. Schaumann, A Schreiber, M SJaonhoff, and G. H. Findenegg. *Physical Chemistry Chemical Physics*, 10:6039, 2008.
- [24] J. Deschamps, F. Audonnet, N. Brodie-Linder, M. Schoeffel, and C. Alba-Simionesco. *Physical Chemistry Chemical Physics*, 12:1440, 2010.
- [25] N. Giovambattista, P. J Rossky, and P. G. Debenedetti. *The Journal of Physical Chemistry B*, 113:13723, 2009.
- [26] E. B Moore, J. T Allen, and V. Molinero. *The Journal of Physical Chemistry C*, 116:7507, 2012.
- [27] N. Giovambattista, P. J Rossky, and P. G. Debenedetti. *Physical review letters*, 102:050603, 2009.
- [28] E. W. Hansen, M. Stöcker, and R. Schmidt. *The Journal of Physical Chemistry*, 100:2195, 1996.
- [29] A. Endo, T. Yamamoto, Y. Inagi, K. Iwakabe, and T. Ohmori. *The Journal of Physical Chemistry C*, 112:9034, 2008.
- [30] D. Kondrashova and R. Valiullin. *The Journal of Physical Chemistry C*, 119:4312, 2015.
- [31] M. J. de Oliveira. *Termodinâmica*. 2005.
- [32] Emily B. Moore, James T. Allen, and Valeria Molinero. *The Journal of Physical Chemistry C*, 116(13):7507–7514, 2012.

# Sobre a Existência de Dogmas em Física

OLAVO L.S.F.\*

Instituto de Física - Universidade de Brasília - UnB  
Campus Universitário Darcy Ribeiro - Asa Norte  
70919-970 Brasília / DF

## Abstract

*A Física se tornou há mais de quinhentos anos uma ciência autônoma. Essa autonomia foi conquistada a partir do desenvolvimento de metaprincípios que permitem identificar o que, afinal é fazer Física. A questão que permanece, para alguns, é a de saber se a Física, seja no plano do seu conteúdo, seja naquele de seus metaprincípios, enseja algum tipo de dogmatismo. Neste artigo analisamos essas duas dimensões da Física para apresentar uma resposta à pergunta sobre a existência de dogmas em Física.*

## 1 Introdução

O nascimento da Filosofia Ocidental como a conhecemos pode ser caracterizado pelo surgimento, na Grécia Antiga, de um grupo de filósofos da natureza, os *physikos*, que apresentavam, dentre suas grandes preocupações, o interesse em reduzir a compreensão do mundo a um conjunto limitado e ordenado de elementos objetivos (que, entretanto, ainda não seriam as *leis* como as concebemos modernamente).

Tais filósofos da natureza (*physikos*), como Tales, Anaxímenes, Anaximandro, Xenófonos, dentre tantos outros procuraram, para atingir esse fim, estabelecer um afastamento relativamente à explicação até então aceita sobre a origem do mundo (cosmogonia) e seu funcionamento. Explicação essa fundada na concepção de uma natureza repleta de deuses e poderes, cujo funcionamento (o que chamaríamos de fenômenos hoje em dia) era remetido aos desígnios, quando não caprichos, de um ou mais deuses.

Esse pode ser considerado, acreditamos, um dos primeiros movimentos em busca de um *critério de objetivação* dos processos naturais, na medida que remove destes o elemento volitivo e subjetivo irremediavelmente introduzido pela referência ao comportamento de deidades — diga-se de passagem, em nada diferente dos próprios comportamentos humanos, que se viam apenas potencializados nos deuses através dos mitos.

Com os *physikos* tratava-se, pois, de se buscar no funcionamento particular das coisas um conjunto limitado de *princípios* pelos quais o funcionamento geral da natureza pudesse ser perscrutado, compreendido e, finalmente, previsto.

---

\*email: olavolsf@gmail.com

Muitos foram os princípios selecionados: em Tales, a água; em Anaxímenes, o ar; em Anaximandro, o *ápeiron* ou o ilimitado; em Empédocles as quatro raízes (fogo, ar, água, terra), para os atomistas, os indivisíveis ou átomos fundamentais, dentre muitos outros. Passou-se assim de uma perspectiva *cosmogônica*, mais interessada em uma narrativa sobre a influência dos deuses no processo pelo qual apareceu uma ordem (*cosmos*) percebida no mundo, a uma perspectiva *cosmológica*, que se perguntava pela estrutura objetiva (*logos*) que sustentava ou servia de fundamento à ordem *buscada* no mundo.

Tal afastamento, entretanto, deu-se há muito tempo — aproximadamente dois mil e quinhentos anos — e pode ser compreendido como um processo pelo qual a *filosofia natural*<sup>1</sup> se estabeleceu como *campo autônomo do conhecimento*, distinto da religião ou da mitologia da época.

Assim como foi crucial para a Filosofia encontrar um elemento de afastamento entre si, suas preocupações e seus métodos, e as necessidades e perspectivas de caráter religioso-mítico do período pré-socrático, inúmeras outras áreas de conhecimento modernas (e não apenas as ciências naturais) surgiram de um afastamento perante a própria Filosofia, de maneira análoga à que descrevemos anteriormente, ou seja, pela interposição de seus objetos e métodos, diferenciados daqueles de caráter eminentemente filosóficos, e capazes de fundamentar (e fundar) sua especificidade.

No que concerne à Física, o afastamento perante a Filosofia (sempre, inicialmente, um movimento de cunho inevitavelmente filosófico) deu-se ao longo de praticamente mil e oitocentos anos.

Entretanto, o afastamento buscado pela Física com relação à Filosofia não se deu no sentido de retornar às perspectivas pré-*physikos*: o afastamento do afastamento não precisa ser uma aproximação. Muito ao contrário, como defenderemos, tal afastamento representou um aprofundamento das diferenças apenas inicialmente aventadas pelos *physikos*.

Mas, afastar-se da *religião* não significa, *ipso facto*, afastar-se do dogmatismo — pode significar afastar-se, eventualmente, de um dogmatismo de caráter religioso, estabelecendo, entretanto, um dogmatismo em seus próprios critérios e métodos.

Saber se a Física moderna afastou de si o dogmatismo, tal é a questão que aqui nos interessa.

O artigo está organizado da seguinte maneira: na seção seguinte faremos uma breve exposição sobre a noção de *dogma*. Não ultrapassaremos a noção de senso comum do termo, uma vez que isso poderia trazer artificialidade à abordagem, se não um viés inevitável.

Em seguida, apresentaremos, de maneira esquemática, as estratégias que levaram a Física a se estabelecer como área autônoma de conhecimento, afastando-se da Filosofia propriamente dita. Defenderemos que tal afastamento se deu, em muitos sentidos, de forma análoga àquela do afastamento dos *physikos* da religião de sua época—a partir do estabelecimento de um conjunto de *metaprincípios*.

Finalmente, tentaremos estabelecer as relações eventuais entre as noções de dogmas e metaprincípios, de modo a apresentar nossa resposta à questão que dá origem a este artigo.

Apresentaremos, então, nossas conclusões.

---

<sup>1</sup>Ou apenas *filosofia*, já que estamos no chamado período pré-socrático e não se pode distinguir ainda outras áreas da Filosofia como a conhecemos atualmente (como a ética, a política, a estética e a metafísica — essa última largamente *exercida*, como ontologia, mas não *tematizada*).

## 2 Dogmas

Como já adiantamos na introdução, neste trabalho estaremos utilizando uma noção de senso comum acerca do termo “*dogma*”. Para tanto, consideramos de bom alvitre buscar tal noção em referências que mantivessem essa característica. Apresentamos, a seguir, uma caracterização de dogma:

"Dogma é um termo de origem grega que significa literalmente ‘o que se pensa é verdade’. Na antiguidade, o termo estava ligado ao que parecia ser uma crença ou convicção, um pensamento firme ou doutrina.

Posteriormente passou a ter um fundamento religioso em que caracteriza cada um dos pontos fundamentais<sup>A</sup> e indiscutíveis<sup>B</sup> de uma crença religiosa<sup>C</sup>. Pontos inquestionáveis, uma verdade absoluta<sup>D</sup> que deve ser ensinada com autoridade<sup>E</sup>.

Além do cristianismo, os dogmas estão presentes em outras religiões como o judaísmo ou o islamismo. Os princípios dogmáticos são crenças básicas<sup>G</sup> pregadas pelas religiões, que devem ser seguidos e respeitados pelos seus membros sem nenhuma dúvida<sup>H</sup>." [1]<sup>2</sup>

Da citação anterior, podemos abstrair as seguintes características de um dogma:

1. São crenças básicas;
2. cujos pontos fundamentais são ensinados com autoridade;
3. permanecendo como indiscutíveis;
4. ao serem considerados como verdade absoluta;
5. que devem ser seguidas e respeitadas sem nenhuma dúvida.

Afastamos, entretanto, a ideia de que tais crenças básicas devam ser, necessariamente, de caráter religioso.

Trata-se, portanto, de responder se, em algum nível, a Física poderia ter elementos seus enquadrados em algumas dessas características.

Notamos, entretanto, que as características que elencamos diretamente da definição de senso comum se organizam em dois planos distintos: (a) as propriedades inerentes ao dogma, ou seja, que o qualificam como objeto (crença básica) e (b) as *posturas* daqueles que se inserem em um contexto dogmático.

Assim, portanto, dado um campo linguístico específico (um jogo de linguagem[2], se preferirem), a estrutura dogmática que eventualmente se deseja apor a ele não pode ser inferida exclusivamente do caráter básico de um conjunto de crenças sobre o qual o jogo linguístico se estrutura, mas precisa levar em consideração também a maneira pela qual os jogadores deste jogo linguístico se posicionam frente a tais crenças — e isso não do ponto de vista dos jogadores individualmente considerados, mas das próprias *regras* do jogo. Ou seja, deve fazer parte *da regra* do jogo linguístico a adoção da postura dogmática acerca de algum elemento básico seu.

---

<sup>2</sup>Marcas nossas das propriedades aludidas para facilitar futuro cotejamento.

Na seção seguinte, apresentaremos de forma esquemática os principais elementos que permitiram à Física se estabelecer como campo autônomo do conhecimento e discorreremos sobre a noção de *metaprincípios*.

### 3 A Física como Ciência Autônoma: metaprincípios

Assim como a Filosofia necessitou de um bom tempo para se descolar de perspectivas mitológicas, como as de um Hesíodo na Grécia Antiga, e assim se estabelecer como campo autônomo de conhecimento, também a Física, como a conhecemos, necessitou de muitos séculos para adquirir sua autonomia frente à Filosofia. A aquisição dessa autonomia se concretizou, precisamente, pelo desenvolvimento de alguns metaprincípios que são usados para que se possa *reconhecer que uma investigação que se faz é, de fato, Física*. Nesse sentido, metaprincípios são também critérios de reconhecimento e, também, de identidade.

Muitos atores fizeram parte desse processo pelo qual a Física se tornou uma ciência autônoma. Entretanto, se podemos citar alguns desses como protagonistas, certamente seriam Aristóteles e Galileu.

Aristóteles, em particular, pode ser visto como tendo desempenhado um papel ambíguo em todo o processo. Como se sabe, a Filosofia Grega se expandiu enormemente no que concerne seus interesses após o período pré-socrático. A chamada guinada ética fez o interesse dos *physikos*, voltados ao mundo natural, ser deslocado para o interesse nos seres humanos e sua condição no mundo: a ética e a política, além da epistemologia, dentre outros campos, passaram a ocupar muito do espaço antes reservados ao pensamento sobre os fenômenos da natureza.

Tal guinada teve em Sócrates e Platão seus principais articuladores. Em nenhum desses dois grandes filósofos encontramos um pensamento sistemático sobre o mundo natural (Platão escreveu *O Timeu*[3] que terá relevância em nossa recuperação do processo de obtenção de autonomia pela Física, mas dificilmente essa obra poderia ser considerada como uma reflexão sistemática sobre os fenômenos naturais).

É com Aristóteles que o pensamento dos *physikos* é retomado e reformado. Em Aristóteles encontramos não apenas um pensamento sistemático sobre o que chamaríamos modernamente de *escopo* da Física quanto aos objetos e fenômenos, mas também é possível divisar uma sistematização de outras áreas do conhecimento científico, como a biologia (Citar), a linguística (*As Categorias* e *Da Interpretação (Peri Hermeneias)*) e a psicologia (*Sobre a Alma (De Anima)*). Especificamente importantes para a Física foram as obras: *A Física, A Meteorologia, De Geração e Corrupção, Sobre o Céu (De Caelo)*[4].

De fato, a sua *Física*, que ocupa lugar de destaque dentre as outras obras, pode ser lida como uma maneira de apresentar todo o campo da Física como possível, em contraposição às objeções dos Eleatas, como Zenão<sup>3</sup>[5]. Na *Física*, portanto, Aristóteles organiza, à luz de sua própria filosofia, que envolvia, ainda e fundamentalmente, desenvolvimentos apresentados em sua *Metafísica*, toda uma Física (ou Filosofia Natural) que irá atravessar quase dois mil anos como a visão predominante sobre o mundo natural. Durante esse período, Aristóteles, e sua visão do mundo natural, foi diversas vezes contestado, seja por filósofos como Philoponus, ou por filósofos árabes, como Avicena ou Averróis. Tais contestações,

<sup>3</sup>Como é sabido, os Eleatas (pré-socráticos), como Parmênides e Zenão, ao introduzir seu pensamento sobre o Ser, impuseram grandes restrições ao saber físico que precisaram ser removidas para que a Física, como campo de conhecimento, pudesse ser articulada em bases coerentes.

entretanto, foram geralmente pontuais (à exceção das de Philoponus[6], mais amplas, mas por razões religiosas - Philoponus era um padre da Igreja).

Mesmo ao final da Idade Média, após a recuperação pelo Ocidente das obras de Filosofia Natural de Aristóteles (ca. 1100 d.C), quando vemos surgir inúmeros centros voltados para tais estudos, como o Merton College, na Inglaterra (onde foram desenvolvidos conceitos fundamentais, como o de aceleração) e as Universidades Europeias, como a Sourbone, na França, Aristóteles ainda era contestado de modo pontual, tendo, entretanto, se avolumado o conjunto de pontos que geravam desconforto entre os filósofos naturais[7]. Assim, para ficar em um exemplo instrutivo, Jean Buridan, idealizador do conceito de *impetus* (um precursor da noção de inércia), critica a teoria do movimento de Aristóteles (o elemento central do conceito de *impetus*), mas mantém, em diversos momentos, a perspectiva Aristotélica dos lugares naturais – incompatível com o conceito de *impetus*[8].

Aristóteles, portanto, cumpre na História, um papel duplo no processo de emancipação da Física. Se ele é o filósofo mais importante na recuperação das elocubrações dos pré-socráticos sobre o mundo natural, é também aquele que irá manter a Física, por milênios, sob um olhar de caráter eminentemente filosófico, e, assim, termina representando uma resistência ao processo de emancipação ao qual nos referimos.

É com o surgimento de Galileu[9], que caracterizamos aqui como o grande sistematizador das contraposições à física aristotélica, desenvolvidas no âmbito do fim da Idade Média, que será dado início ao processo de emancipação. Assim, é com Galileu, e nesse instante da História do pensamento ocidental, que veremos serem sistematizados aqueles princípios que irão dizer, daí em diante e até nossos dias atuais, o que se deve considerar como o pensamento e o método da Física. Portanto, é desse período que podemos extrair os metaprincípios da Física (ou sua Metafísica).

Como é sabido, a abordagem aristotélica não se fundamentava na investigação do mundo através do uso da Matemática<sup>4</sup> e, mesmo sendo uma abordagem *empírica*, jamais foi uma abordagem *experimental*. Galileu sistematiza o novo pensamento da Baixa Idade Média (séculos XI ao XV) que retoma a ideia do papel central da Matemática na compreensão dos fenômenos físicos (um elemento neo-pitagórico que pode ser divisado no *Timeu* de Platão), e que também desenvolve o pensamento experimental (de autores como Francis Bacon, dentre outros), voltado para uma perspectiva ativa frente à natureza, que defende sua manipulação, para além de sua observação passiva.

Assim, é em Galileu que encontramos, de forma explícita, a afirmação de que a Natureza é um livro escrito em linguagem matemática e que é essa linguagem, a Matemática, e não a Lógica aristotélica que deve ser o fundamento de sua compreensão<sup>5</sup>.

Foi através desse processo de filtragem e sistematização das ideias da Baixa Idade Média, relativas à Matemática e ao Método Experimental, que Galileu, juntamente com outros filósofos naturais de seu tempo (Copérnico, Kepler, Tycho Brahe, dentre outros), pode estabelecer um novo patamar para o pensamento físico *que permanece válido até os dias atuais*, em seus elementos metodológicos (ou seja,

<sup>4</sup>Atribuiu-se a Aristóteles, por algum tempo, a obra "Mecânica", em que surgem conceitos matemáticos, principalmente voltados para o estudo do equilíbrio dos corpos (alavanca), mas tal atribuição, hoje em dia, é quase unanimemente considerada equivocada.

<sup>5</sup>Note-se que Galileu não afasta a lógica do processo de compreensão, mas atribui a ela papel muito menos relevante do que aquele atribuído por Aristóteles. Para Galileu, a Lógica deveria ser usada para articular os passos fundamentais hauridos de uma investigação que mesclaria a experimentação e a matematização dos fenômenos isolados pelo processo experimental.

como metaprincípios).

É nesse momento que se constitui o Critério de Verdade da Física como eminentemente matemático-experimental, concretizando uma perspectiva, já em Aristóteles, de verdade como correspondência, mas estabelecida e imaginada em outras bases.

A partir desse período, que chamaríamos aqui de *Período Galileano*, sem demérito para os outros atores, que o fazer físico se torna reconhecível a partir de um uso criterioso (metodológico) do formalismo matemático em consonância com o método experimental — um processo que ao longo desses últimos quinhentos anos foi sendo aprimorado, mas que permaneceu constituindo o grande metaprincípio da Física: *grosso modo* o mundo natural é eminentemente matemático e seu conhecimento deve se fundamentar na investigação matemático-experimental.

Veja-se, entretanto, que o estabelecimento desse metaprincípio tem que fazer um *recorte* dos fenômenos, caso contrário a Física seria a ciência de tudo o que existe. Esse recorte foi desenvolvido, no mesmo Período Galileano, através da distinção entre *Qualidades Primárias* e *Qualidades Secundárias*[10]. Tal distinção fundamenta-se na própria possibilidade de aplicação do metaprincípio da Física, mormente a capacidade de matematizar determinado fenômeno. Assim, *Qualidades Primárias* são aquelas passíveis de formalização matemática, enquanto que *Qualidades Secundárias* são aquelas que escapam a tal possibilidade<sup>6</sup>.

Com essa diferenciação fica estabelecida a especificidade da Física e, portanto, seu caráter autônomo.

## 4 Metaprincípios e Dogmatismo

Todo o desenvolvimento feito na seção anterior tem por função chegar ao que chamamos de metaprincípios da Física, ou seja, seu critério de identificação como um fazer diferenciado de outros fazeres. Mas porque consideramos necessário fazer tal desenvolvimento? Aqui voltamos ao nosso tema principal: o problema do dogmatismo.

Vimos em seção anterior, que uma característica fundamental de um jogo de linguagem dogmático era o caráter básico da crença envolvida e, do ponto de vista do comportamento dos atores envolvidos no jogo de linguagem, também seu caráter inquestionável.

Assim, devemos buscar na Física algum patamar em que essas duas características se apresentam, se quisermos acessar algum nível em que o dogmatismo pode ocorrer.

Entretanto, certamente não é na sintaxe da Física (a Matemática) que se encontrarão esses elementos. De fato, se poderia qualificar como um erro categorial qualificar os resultados da Matemática como passíveis ou não de crença, uma vez que a Matemática é uma *linguagem formal* e seus critérios de verdade são internos (lógico-formais) e não relacionados com as chamadas questões de fato (questões sobre o mundo e seus fenômenos).

Em um patamar mais elevado do fazer físico, a semântica (em que a Física estabelece suas interpretações do mundo), certamente há amplo espaço para a dúvida e o questionamento, que de fato é

<sup>6</sup>Assim, a *percepção* da cor é uma Qualidade Secundária, enquanto que o comprimento de onda é uma qualidade primária. Da mesma maneira, as *sensações de quente ou frio* são Qualidades Secundárias, enquanto que a temperatura é uma Qualidade Primária.

feito incessantemente e constitui, em verdade, o motor do desenvolvimento da própria Física. Mesmo os *modelos* físicos (como um modelo para o elétron, para planetas ou para os ventos) são amplamente revisáveis. De fato, o advento da Mecânica Quântica e da Teoria da Relatividade mostra sem sombra de dúvidas quão revisável é a semântica da Física<sup>7</sup>.

Não encontrando nesses dois patamares de articulação de Teorias Físicas os elementos necessários para a caracterização do pensamento dogmático, poderíamos tentar divisá-los mais além, naqueles que são considerados os princípios fundamentais *da Natureza* (como os princípios de conservação ou simetria). De fato, tais princípios se mostram mais resilientes quanto a possíveis questionamentos. Nem por isso é-nos impossível encontrar exemplos históricos concretos em que tais princípios foram negados (por físicos de renome). Assim, para ficar em um exemplo, no início do Século XX, por ocasião do processo de construção da Mecânica Quântica, Niels Bohr sugeriu, para horror de Einstein, que o princípio de conservação da energia poderia valer apenas macroscopicamente, sendo possível sua violação em nível microscópico.

Note, entretanto, que princípios como o da conservação da energia, ainda que muito mais abstratos do que modelos materiais, teorias físicas, etc, são ainda articuláveis no interior dos objetos precípuos da Física, ou seja, são elementos que a Física usa para constituir sua apreciação do mundo - são (ou se baseiam em) construtos físicos.

Assim, resta-nos apenas acessar um plano ainda mais abstrato relacionado à Física, mas que agora nos *retira* (abstrai) de seus construtos e, de fato, constitui uma metalinguagem física, ou seja, uma linguagem sobre a linguagem física. Esse plano é, precisamente, aquele dos metaprincípios.

Nele já não se diz mais o que o mundo é ou deve ser, segundo tais ou tais métodos, critérios, princípios ou fundamentos; diz-se sim o que a Física é ou deve ser (metaprincípios, nesta perspectiva, são nomológicos). Ao se fazer isso, não se oblitera o elemento da dúvida (que, ademais, é coextensiva à finitude humana), mas garante-se que, ao duvidar, o sujeito da dúvida *já não se insere mais no contexto da Física sequer como linguagem*, quanto mais como conteúdo.

Há aqui, portanto, um elemento auto-referencial (e, portanto, de imensa complexidade<sup>8</sup>): o metaprincípio, ao *definir* o que é o campo da Física, se coloca ao largo da dúvida *por Físicos*, justamente por impor que a dúvida descaracteriza aquele que duvida como físico.

Vejamos, então, *como se comportam* os físicos frente ao Metaprincípio Galileano que apresentamos anteriormente: trata-se, certamente, de uma crença básica, indiscutível, aceita e seguida por todos de maneira automática, sem contestação ou resquício de dúvida. Para se certificar dessa caracterização, basta que o leitor, se for Físico, pense por um instante apenas sobre suas próprias práticas quando se defronta com um problema de Física, um fenômeno natural, e as estratégias que aceita adotar como meio de elucidação de tal fenômeno.

A questão do "ensinamento pela autoridade" é mais sutil, entretanto - e isso por causa da característica

<sup>7</sup> Assim como os desenvolvimentos na área dos chamados fluidos imponderáveis (Termodinâmica), ou do próprio Eletromagnetismo e suas noções de campo, para citar apenas alguns exemplos.

<sup>8</sup> É sabido que os elementos linguísticos auto-referenciais constituem imensa dificuldade no âmbito das considerações humanas. Assim é com a prova de Gödel no âmbito da aritmética, ou com sentenças como "Esta frase é uma mentira" (se a frase é mentirosa, é verdadeira, se é verdadeira, é mentirosa). Problemas assim ocorrem também na Teoria dos Conjuntos e exigem a criação de uma Tipologia ou Teoria dos Tipos.

mesmo de um metaprincípio. Tendo seu fundamento na dúvida, a Física, no que concerne seus conteúdos, não pode suportar a noção de autoridade como esta é articulada no âmbito da definição de dogma. Ainda que, do ponto de vista pragmático, o peso da autoridade de um Einstein seja enorme, nem por isso seus ensinamentos são tomados como verdades absolutas e, de fato, concretamente, vemos "Einsteins" de toda espécie (em particular o próprio) sendo constantemente combatidos e refutados ao longo da História da Física.

Entretanto, um metaprincípio não pertence à Física (daí ser "meta" –  $\tau\alpha\ \mu\epsilon\tau\alpha$  = para além de). Por ser definidor do campo, *precisa* ser aceito por todos os que desejam se autodenominar físicos. Sua absorção, entretanto, não se dá por ensinamento direto, como metaprincípio (ainda que pudesse sê-lo), mas por introjeção pelo aprendiz da própria metodologia da Física, que concretiza o metaprincípio. Esse fato, entretanto, não descaracteriza um "ensinamento pela autoridade", mas elide essa autoridade e até mesmo a torna abstrata, a partir do momento em que se torna metaprincípio – Galileu não é mais necessário, não é à autoridade *dele* que referimos. A partir de seu estabelecimento, o metaprincípio *dá a si mesmo sua autoridade* – tal é a dimensão auto-referencial a que aludimos.

Curiosamente, por ter essa característica e, também, por estar necessariamente *fora do escopo da própria Física*, não é possível aplicar o critério físico de Verdade ao metaprincípio – mas talvez se possa imaginar um critério pragmático de verdade.

Um metaprincípio, sendo a *definição* de um campo, não pode ser considerado verdadeiro ou falso (apenas proposições são verdadeiras ou falsas)<sup>9</sup>. A *definição* é um elemento puramente linguístico e, portanto, arbitrário. Ela pode ser útil, interessante, ridícula ou até mesmo inconsistente ou consistente com outras definições, mas não há como atribuir-lhe valor de Verdade (mas ainda pode-se atribuir-lhe valor de consistência, por exemplo). Assim como o xadrez é um jogo reconhecido pelas suas regras (incluindo-se aí o formato e aparência do tabuleiro, peças, movimentos, etc), um jogo de linguagem, como a Física, é reconhecido pelas *suas* regras (que estabelecem sua autonomia como campo de atuação humana). O metaprincípio estabelece tais regras e, portanto, é de caráter definicional. Mais ainda, como já dissemos, uma de tais regras é precisamente o concurso da dúvida, de uma dúvida incessante sobre todo e qualquer elemento interno ao campo definido pelo metaprincípio, o que decorre, estruturalmente, do fato de a Física ser um jogo linguístico *aberto*<sup>10</sup>.

Deste modo, um metaprincípio pode ser *adotado* com maiores ou menores ressalvas (ou mesmo ressalva nenhuma), mas dele não se pode duvidar ou acreditar. Se poderia duvidar, por exemplo, da divisão dos fenômenos naturais em Qualidades Primárias e Secundárias. Mas isso apenas expandiria ou contrairia o escopo da Física, mantendo intocada sua concepção. De fato, fenômenos são constantemente incluídos (ou removidos) do escopo da Física<sup>11</sup>.

Entretanto, poder-se-ia dizer que a própria adoção de um metaprincípio envolve uma crença, e que

<sup>9</sup>Seria como querer atribuir à *definição* de "casa" um valor de verdade. O que se faz é, de fato, *a partir* de uma definição de casa, estabelecer a verdade de uma proposição que se refira a um objeto como sendo "casa".

<sup>10</sup>O que, diga-se, impacta sua própria noção de Verdade, que não pode ser vista como lógico formal de maneira simples, mas cuja discussão não se coloca na alçada deste artigo.

<sup>11</sup>Um exemplo de inclusão seriam alguns fenômenos psicológicos, amplamente matematizáveis e tratáveis segundo os mesmos pressupostos que qualquer outro fenômeno físico usual. Um exemplo de exclusão seriam os fenômenos paranormais, ao menos até esta data (lembrar, por exemplo, do uso do magnetismo no século XIX, como associado a certos estados metafísicos).

seria neste ponto que *os físicos agiriam de maneira dogmática*, ao considerar impossível se fazer Física de maneira diferente. Veja-se, entretanto, que os físicos não consideram impossível conhecer o mundo de maneira diversa daquela que adotam. Várias ciências o fazem. O que o físico faz é reconhecer, justamente pela definição, que aquela ciência *não é Física*.

## 5 Conclusão

A discussão sobre se a Física teria um conteúdo dogmático só pode ser elucidada com referência ao próprio processo pelo qual esta ciência se tornou autônoma frente à Filosofia. Nesse processo, a Física se constituiu identitariamente sobre os metaprincípios de um acesso matemático/experimental ao mundo, em uma conjugação que concretiza a noção de verdade como correspondência, defendida desde há muito no âmbito da Filosofia Natural.

A definição de metaprincípios que definem seu escopo através da metodologia que justamente faz a concretização mencionada não pode ser considerada dogmática. Sendo uma definição de escopo, não se pode sequer atribuir a ela valor de verdade, quanto mais verdade indiscutível. Com essa definição de escopo, a Física não pretende ser a única ciência capaz de revelar e compreender fenômenos naturais — apenas reservar para si um modo particular de descobri-los ou compreendê-los.

Uma vez que, do ponto de vista de seu conteúdo, leis e princípios, a Física se mostra permeável a todo tipo de dúvida; e que, do ponto de vista de seus metaprincípios, a questão parece nem se colocar adequadamente, não parece razoável impingir à Física uma postura dogmática.

Entretanto, como dissemos anteriormente, um elemento dogmático pode ser intrínseco, quando a crença em uma verdade absoluta está nas próprias regras do jogo de linguagem, ou pode ser extrínseco, ao pertencer ao comportamento dos atores, que adotam uma postura dogmática, mesmo ela não sendo necessária — nem, talvez, recomendada pelo próprio jogo de linguagem e suas regras. Mas neste caso, o máximo que se pode fazer é indicar aos jogadores que estão jogando errado o jogo... Ou que talvez estejam jogando o jogo errado.

## References

- [1] Retirado de: <https://www.significados.com.br> acesso em 13/12/2016.
- [2] Wittgenstein, L. *Investigações Filosóficas*. São Paulo: Abril Cultural, 1975. (Coleção "Os Pensadores").
- [3] Platão, *Complete Works*, Ed. John M. Cooper, Indianapolis: Hackett Publishing Co., 1997.
- [4] Aristóteles, *The Complete Works of Aristotle*, Two Vols., Ed. Jonathan Barnes, New Jersey: Princeton University Press, 1984.
- [5] Kirk, G. S.; Raven, J. E.; Schofield, M., *The Presocratic Philosophers*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

- [6] Sorabji, R. Ed. *Philopponus and the rejection of Aristotelian Science*, London: Duckworth, 1987.
- [7] Crowe, M. J., *Mechanics, from Aristotle to Einstein*, New Mexico: Green Lion Press, 2001; Lloyd, G.E.R., *Early Greek Science: Thales to Aristotle*; New York: WW Norton & Company, 1970; Lloyd, G.E.R., *Greek Science After Aristotle*, New York: WW Norton & Company, 1973. Grant, E., *A History of Natural Philosophy*, New York: Cambridge University Press, 2007.
- [8] Koyré, A., *Estudos Galilaicos*, Lisboa: Dom Quixote, 1986.
- [9] Galileu Galilei, *Dialogues Concerning Two New Sciences*, New York: Prometheus Books, 1991.
- [10] Burt, E. A., *As Bases Metafísicas da Ciência Moderna*, Brasília: Editora UnB, 1991.

# Uma Técnica de Otimização Utilizando Algoritmos Genéticos para Encontrar Extremos de Funções

JOÃO AUGUSTO SOBRAL DA SILVA E LUIZ ANTONÔNIO RIBEIRO JUNIOR

Instituto de Física - Universidade de Brasília - UnB

Campus Universitário Darcy Ribeiro - Asa Norte 70919-970 Brasília / DF

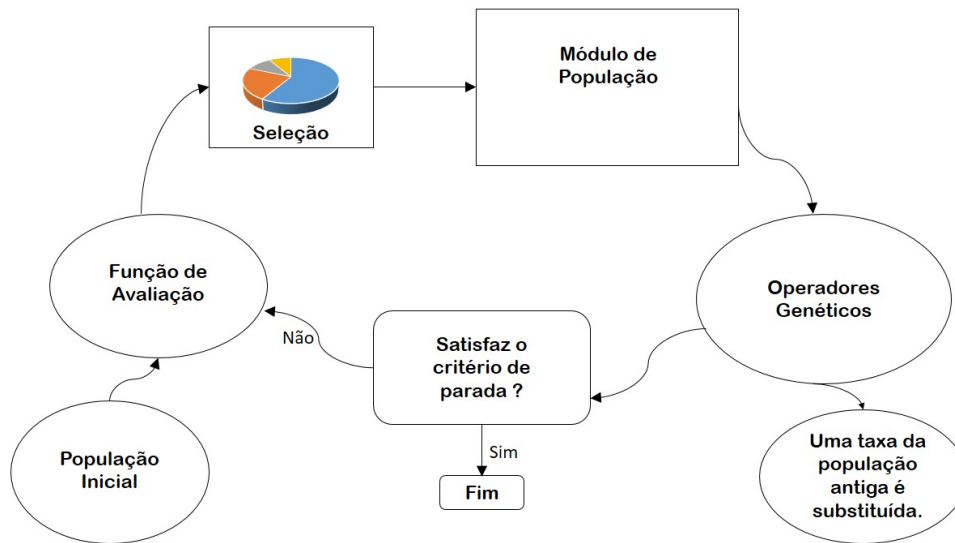
## Resumo

*Neste trabalho foram estudadas técnicas heurísticas de otimização global utilizando algoritmos genéticos. Populações de indivíduos foram criadas e submetidas a operadores genéticos de forma a simular um processo de evolução natural, gerando indivíduos que se adequassem aos extremos das funções de avaliação.*

Palavras-Chave: Algoritmos Genéticos; Otimização.

## 1 Introdução

Uma busca tem como principal objetivo encontrar a melhor solução dentre todas as soluções possíveis – o chamado espaço de soluções. Algoritmos genéticos são algoritmos de busca baseados nos mecanismos de seleção natural e genética, ou seja, em conceitos como de hereditariedade, reprodução e mutação[1]. Esta técnica quase não necessita de interferência humana e encontra soluções próximas das soluções ótimas, necessitando apenas de uma forma de avaliação do resultado. Além disto, este tipo de algoritmo não possui a necessidade de se utilizar a derivada da função avaliada, o que seria extremamente complicado ao se tratar de funções descontínuas em determinados pontos.



**Figura 1:** Estrutura Básica de um Algoritmo Genético

A figura 1 ilustra o funcionamento básico de um algoritmo genético. Inicialmente é gerada uma população com um determinado número de indivíduos e esses são avaliados através de uma função de avaliação. Em seguida, todos os indivíduos ganham uma probabilidade de serem selecionados para reproduzirem a partir de suas avaliações. Os indivíduos selecionados geram novos por um determinado método de reprodução. Visando uma maior variabilidade genética nas populações, operadores genéticos como os de mutação são aplicados em uma porcentagem da população. Após isto, uma taxa da população antiga é substituída pelos novos indivíduos, desses seleciona-se o melhor, que será utilizado como critério de parada caso seja encontrado, do contrário, todo o processo do loop é repetido.

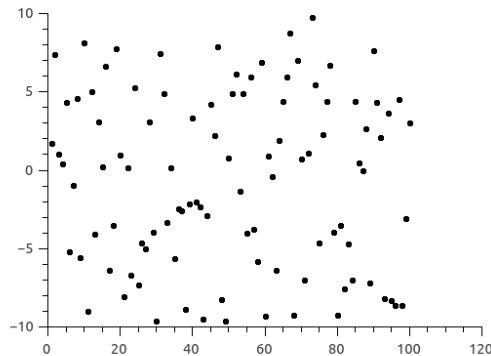
Sendo assim, este projeto teve como objetivo o desenvolvimento de um algoritmo genético capaz de encontrar os extremos globais e locais de uma determinada função.

## 2 Seção Experimental

A primeira subrotina “População Inicial” foi criada através da função  $\text{ran1}(\text{idum})$ [2], gerando uma certa quantidade de indivíduos em um intervalo específico. A função  $\text{ran1}$  é responsável por gerar um número entre 0 e 1, para os efeitos do algoritmo a seguinte equação foi utilizada:

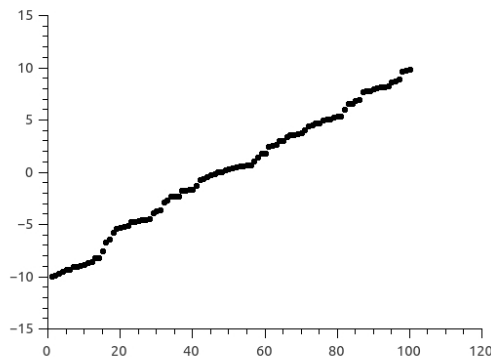
$$X(i) = \text{ran1}(\text{idum}) \cdot (\text{IntF} - \text{IntI}) + \text{IntI} \quad (1)$$

Onde  $\text{IntF}$  é último número e  $\text{IntI}$  o primeiro número do intervalo escolhido.



**Figura 2:** 100 Indivíduos gerados de forma aleatória entre -10 e 10 em uma função teste.

Todos os indivíduos foram analisados pela função de avaliação. A subrotina “Ordenar” foi estruturada de modo a ordenar todas as avaliações e indivíduos de forma crescente utilizando o método de ordenação Bubblesort[2].



**Figura 3:** Indivíduos ordenados pelo método Bubblesort.

O método da roleta viciada atribui a cada indivíduo uma porcentagem de ser selecionado e parte de uma roleta virtual. Esta probabilidade pode ser obtida através da seguinte expressão:

$$prob(i) = \frac{Y(i)}{\sum_{i=1}^n Y(i)} \quad (2)$$

Onde prob(i) indica a probabilidade do indivíduo ser escolhido, Y(i) sua avaliação,  $\sum_{i=1}^n Y(i)$  a soma de todas as avaliações e “n” o número de indivíduos em cada geração. Para indivíduos com uma avaliação negativa o termo no denominador da expressão em (2) não faria sentido. Uma subrotina chamada “Translação” foi criada com o intuito de evitar esse problema na seleção com a seguinte equação:

$$T(i) = Y(i) - Y(1) \quad (3)$$

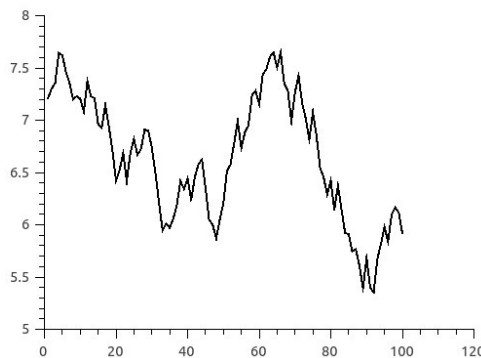
Onde  $T(i)$  representa a avaliação do indivíduo transladada,  $Y(i)$  a avaliação do indivíduo e  $Y(1)$  a avaliação do primeiro indivíduo.

Como a subrotina “Ordenar” organizou todos os indivíduos e avaliações de forma crescente, o primeiro indivíduo possui a menor avaliação, portanto, cada indivíduo possui uma avaliação maior ou igual a 0 na subrotina “translação”.

Fenômenos de convergência genética, ou convergência prematura, ocorrem quando o algoritmo converge de forma muito rápida para um máximo ou mínimo local. Para se evitar problemas como este, após transladadas, todas as avaliações foram enviadas para uma subrotina chamada “Linearização”, onde uma nova espécie de função de avaliação foi criada de modo a evitar que os melhores indivíduos fossem sempre selecionados.

Os indivíduos foram então enviados para a subrotina “seleção” onde o método da roleta viciada [1] foi utilizado.

Os pais escolhidos para reprodução foram enviados para a subrotina “Reprodução” onde o método Gaussian Random Walk[3] foi utilizado. O método random walk consiste em uma caminhada aleatória dentre um intervalo especificado - no caso os dois pais escolhidos - o último indivíduo da caminhada é sempre o escolhido como um dos filhos. Para um conjunto de passos e de indivíduos muito grande na caminhada, o gráfico deste método se aproxima ao de uma distribuição normal. Quanto maior a caminhada, maior a largura da distribuição.



**Figura 4:** *Random Walk para 100 passos*

Na subrotina “Atribuição” os filhos gerados substituíram metade dos indivíduos da geração de seus pais, os indivíduos com a avaliação mais baixa. Utilizando a técnica de elitismo[1], o melhor indivíduo de cada geração permaneceu nas próximas gerações, tendo mais chances de ser escolhido para reproduzir.

Por fim, todos estes indivíduos sofreram uma espécie de mutação: 5 por cento dos indivíduos foram selecionados para sofrerem um acréscimo ou decréscimo infinitesimal utilizando o método random walk[3].

A figura 5 ilustra o funcionamento do programa como um todo, os loops foram efetuados até o critério de parada ser alcançado.

Função Teste	Máx. (Esperado)	Máx. (Encontrado)	Mín. (Esperado)	Mín.o (Encontrado)
$x^2$	-	-	0	0
$x^3 - 9x$	-1,73205080756	-1,73205081221	1,73205080756	1,73205080605
$e^{\cos(x)}$	6,28318530717	6,28318530307	3,14159265358	3,14159265207

**Tabela 1:** Resultados do Algoritmo para algumas funções teste

```

Programa Principal
Subrotina População Inicial

Loop Repetir até que o número de gerações determinado seja alcançado
Subrotina Função de Avaliação
Subrotina Ordenar
Subrotina Translação
Subrotina Linearização
Loop Repetir n/2 vezes
Subrotina Seleção
Subrotina Reprodução
Fim Loop
Subrotina Mutação
Subrotina Atribuição e Elitismo
Fim Loop

Fim Programa Principal
    
```

**Figura 5:** Estrutura Principal do Algoritmo

### 3 Resultados e Discussão

O algoritmo teve resultados satisfatórios para as 3 funções teste, como demonstra a tabela 1. Os valores encontrados para os extremos nas funções teste 2 e 3 tiveram uma precisão de pelo menos 7 casas decimais. O tempo de execução do pior caso foi extremamente baixo, portanto, o algoritmo consegue desempenhar o papel pelo qual foi desenvolvido de forma tangível.

A função teste 2 possui um máximo em -1,73 e um mínimo em 1,73. Após este ponto a função cresce para infinito positivo. Ao encontrar o ponto de máximo da função o algoritmo continuou procurando por outros candidatos a máximo, ou seja, os valores de x cresceram cada vez mais, tendendo ao infinito. Em casos de convergência genética o algoritmo ficaria preso nesse máximo local.

A função teste 3 apresenta um comportamento periódico. Os valores apresentados foram calculados somente para valores maiores que 0. Em outros testes, máximos e mínimos para x negativo foram encontrados da mesma forma.

### 4 Conclusão

Todas as soluções encontradas são satisfatórias ou estão muito perto das soluções ótimas. Para todos os resultados o tempo de execução se encontrou dentro do intervalo esperado. Os objetivos do projeto

foram alcançados tendo em vista que o algoritmo respondeu bem a diversas funções teste. Após mais testes e aperfeiçoamentos o algoritmo será utilizado para estudar espectros de sistemas diatômicos.

## Agradecimentos

Os autores são gratos pelo suporte dado pelo CNPq e pela FAP-DF.

## 5 Referências

- [1] R. Linden, Algoritmos Genéticos, 2006.
- [2] S. Teukolsky, W. Vetterling, W. Press, B. Flannery, Numerical Recipes: Example Book (FORTRAN), 1986.
- [3] S. Luke, Essentials of Metaheuristics, 2015.

# Radiação de Corpo Negro e os Primórdios da Física Quântica\*

ANTONY M. M. POLITO<sup>†</sup>

Instituto de Física - Universidade de Brasília - UnB  
Campus Universitário Darcy Ribeiro - Asa Norte  
70919-970 Brasília / DF

## Plano de Apresentação

1. Introdução – As Duas Nuvens Negras de Lord Kelvin.
2. Os problemas do *Princípio de Equipartição*.
3. Leis: Kirchhoff, Stefan-Boltzmann, Wien e Rayleigh-Jeans.
4. Rayleigh e Planck: a relação entre distribuição de energia da radiação e energia média por grau de liberdade.
5. Salvando os fenômenos: a Fórmula de Planck.
6. A “reconciliação” de Planck com Boltzmann.
7. Bibliografia.

## 1 Introdução: As Duas Nuvens Negras de Lord Kelvin

Até 1890, acreditava-se que todos os fenômenos físicos poderiam ser explicados por meio da combinação entre mecânica clássica, eletrodinâmica clássica e termodinâmica. Em particular, a ponte entre os mundos macroscópico e microscópico tinha sido pavimentada pela mecânica estatística de Boltzmann. Porém, novos fenômenos relacionados com a estrutura da matéria começaram a ameaçá-la. A esse respeito, são proféticas as palavras de William Thomson que, na passagem do século XIX para o século XX, escreveu

---

\*Esse trabalho de revisão histórica é uma extensão das seções 5.5 e 5.6 de meu livro *A Construção da Estrutura Conceitual da Física Clássica*. A maioria das partes complementadas foi baseada nos livros de Malcolm S. Longair: *Theoretical Concepts in Physics* (1984) e *Quantum Concepts in Physics* (2013).

<sup>†</sup>antony@fis.unb.br

um artigo que começava com as seguintes palavras: “A beleza e a clareza da teoria dinâmica, que assevera serem calor e luz formas de movimento, estão atualmente obscurecidas por duas nuvens. I. A primeira envolve a questão: como é possível que a Terra se mova através de um sólido elástico, o éter luminífero? II. A segunda é a doutrina de Maxwell-Boltzmann com respeito à equipartição da energia”. Cada uma dessas “nuvens negras” implicou uma revolução no início do século XX, a saber, os adventos da relatividade especial e da física quântica.

## 2 Problemas com o Princípio de Equipartição

A termodinâmica do século XIX se estabeleceu em bases estritamente dinamicistas e constituiu um dos melhores exemplos de uma teoria puramente *fenomenológica*, ou seja, fundada em axiomas cujos compromissos com modelos microscópicos eram totalmente dispensáveis. Desse modo, ela supria as exigências positivistas mais extremas, depositadas em teorias que consistissem apenas em um formalismo que só continha elementos teóricos diretamente interpretáveis em termos observacionais. Contudo, isso jamais inviabilizou o programa de pesquisa mecanicista fundado na investigação das estruturas microscópicas, cujo primeiro caso bem-sucedido foi o da *teoria cinética dos gases*. John Herapath (1790 – 1868), James Waterston (1811 – 1883) e August Krönig (1822 – 1879) estão entre os pioneiros da área, mas, com a possível exceção de Krönig, seus trabalhos tiveram pouco reconhecimento, em suas próprias épocas. Coube a Clausius e a Maxwell retomarem essas investigações.

Foi Clausius que, em 1857, obteve o primeiro sucesso, ao estabelecer a conexão entre os fenômenos macroscópicos da termodinâmica dos gases ideais e o mundo microscópico de sua estrutura atômica. Sua hipótese foi a de que os gases eram formados por átomos esféricos que interagiam por colisões elásticas. Porém, sua principal inovação foi de caráter metodológico, pois, para tratar o problema, ele empregou um *tratamento estatístico*. Ele partiu da ideia de que as velocidades dos átomos se distribuíam aleatoriamente, de acordo com alguma função desconhecida, mas cuja *média* deveria representar a principal característica associada ao conjunto. Com isso, ele reobteve as definições associadas com o *conceito cinético de pressão* – a taxa total de variação de momento nas colisões dos átomos com as paredes do recipiente – e com o *conceito cinético de temperatura* – sua proporcionalidade com a velocidade quadrática média dos átomos. A *energia interna* do gás foi interpretada como a *média da energia cinética* dos seus átomos. Apesar desses sucessos, ele não conseguiu obter o valor correto da *razão entre os calores específicos*,  $\gamma = C_p/C_v$  – que, para gases diatômicos à temperatura ambiente, correspondia a  $\gamma \approx 1,4$ . Clausius intuiu corretamente o motivo da discrepância. Embora tivesse suposto que o gás estocava energia interna apenas através de energia cinética *translacional*, ele especulou sobre a existência de outros modos ainda desconhecidos.

Em 1860, Maxwell partiu de onde Clausius havia parado. Partindo exclusivamente da suposição da *independência estatística* entre as componentes das velocidades dos átomos do gás, ele derivou a sua *distribuição de velocidades*. Metodologicamente, Maxwell enfatizou a virtual equivalência entre os modos como se distribuíam as velocidades dos átomos e os *erros aleatórios*, na teoria de inferência estatística. Mas, o conceito mais importante que ele introduziu foi o de *equipartição da energia*. Maxwell supôs, corretamente, que havia um segundo modo de estocar energia interna: a energia cinética associada à *rotação das moléculas*. Desse modo, cada molécula do gás devia possuir seis graus de liberdade (três

translacionais e três rotacionais). Sua hipótese foi a de que *cada grau de liberdade compartilhava a mesma quantidade média de energia*

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2}kT$$

Essa é a essência do chamado *Princípio de Equipartição*, cuja demonstração definitiva, como teorema, foi realizada por Boltzmann, em 1876. Porém, a hipótese de Maxwell implicava o valor  $\gamma \approx 1,33$ , ainda distante do valor procurado (para os gases diatômicos).

O fato é que a teoria cinética dos gases – juntamente com os primeiros estudos em espectroscopia dos gases e a descoberta de suas raias espectrais de absorção e de emissão, a partir de 1860 – mostrava que a física clássica e a visão mecanicista estavam atingindo o seu limite. A solução correta do problema da razão dos calores específicos exigiria um *tratamento quântico* – o que só foi possível em 1907, pelas mãos de Einstein. Embora esses insucessos tenham lançado as primeiras dúvidas com respeito à validade do teorema de equipartição, Maxwell prosseguiu aplicando sua metodologia estatística e, em 1867, reobteve a distribuição de velocidades do gás ideal a partir da exigência de *invariância* de seu estado de equilíbrio com respeito à dinâmica de colisões moleculares. Ainda em 1867, ele utilizou um poderoso argumento para demonstrar que *a segunda lei da termodinâmica não podia ser uma lei exata, pois, ainda que de forma extremamente improvável, ela poderia ser violada*. Ele mostrou, ainda, que os princípios da mecânica não podiam ser fundamento para a segunda lei, pois a noção de irreversibilidade nela contida era explicitamente contraditória com *a reversibilidade temporal das equações de movimento microscópicas*. Esses resultados podem ser considerados os marcos fundamentais do nascimento da mecânica estatística.

Diferentemente de Clausius, Maxwell estava seguro de que a segunda lei da termodinâmica tinha seu fundamento na estatística daquela enorme quantidade de graus de liberdade microscópicos que os sistemas físicos macroscópicos possuíam. Ele sabia que era fundamental entender como a conexão entre a *realidade física microscópica* e a sua *expressão fenomenológica macroscópica* podia ser obtida como resultado exclusivo da aplicação das *leis da probabilidade*. A realização dessa tarefa coube a Ludwig Boltzmann (1844 – 1906). Entre 1868 e 1871, Boltzmann obteve a generalização da distribuição de Maxwell para gases (poliatômicos) submetidos a *potenciais externos*. Esses resultados formaram o núcleo original das ideias que conduziram à chamada *lei de distribuição de Maxwell-Boltzmann*,  $p = \exp(-E/kT)$ , que representa o cerne da mecânica estatística clássica. Para obter essa generalização, Boltzmann partiu de uma técnica matemática original, independente do problema dinâmico propriamente dito: uma *análise combinatória* da distribuição dos átomos em *células discretas de energia*, vinculadas pela energia total do sistema ( $E$ ). A distribuição de equilíbrio foi identificada com o estado combinatorial mais provável – levada em conta a invariância por permutações de partículas idênticas. A estratégia de discretização da energia no procedimento de Boltzmann não passava de mera conveniência, pois, ao final, o limite do contínuo era tomado. Ele pode, contudo, ter influenciado Planck e Einstein a introduzir a ideia de quantização para resolver, respectivamente, os problemas do espectro do corpo negro e do calor específico dos gases e dos sólidos.

Em 1872, Boltzmann chegou ao chamado *teorema H*, que fornecia o primeiro fundamento sólido para a compreensão estatística da segunda lei da termodinâmica, estendendo o conceito termodinâmico de entropia para estados fora do equilíbrio. A *equação de difusão de Boltzmann* – que dava suporte ao teorema *H* – implicava que qualquer distribuição inicial de velocidades evoluiria, sob dinâmica colisional,

para uma distribuição *maxwelliana* – a única que permanecia *invariante*, nessas condições. Apesar disso, o teorema *H* foi atacado em várias frentes. Os partidários da *física energética* criticavam o compromisso metafísico com o atomismo, em alinhamento com o positivismo radical defendido por Ernst Mach (1838 – 1916). Mais sérias foram as objeções de William Thomson e Johann Loschmidt (1821 – 1895) que, respectivamente, em 1874 e em 1876, consideraram que o teorema *H* encerrava uma contradição insolúvel entre a noção de *irreversibilidade macroscópica* – na sua descrição da rota para o equilíbrio – e a noção de *reversibilidade microscópica* das leis da mecânica. A despeito dos resultados alcançados, Boltzmann ainda acreditava, nessa época, que seria possível derivar a segunda lei da termodinâmica a partir das leis da mecânica, razão pela qual a resposta aos ataques – e a sua conversão final à tese estatística – só apareceram em 1877. A chamada *definição estatística de entropia*,  $S = k \log \Omega$  – entropia como um modo de contar o *número*  $\Omega$  *de microestados acessíveis* a um sistema físico isolado e em equilíbrio –, representou a elucidação completa da relação entre o *conteúdo fenomenológico* da segunda lei e o *fundamento estatístico* oriundo da análise dos graus de liberdade microscópicos. Segundo Boltzmann, a aparente contradição envolvida no teorema *H* poderia ser solucionada se se compreendesse que todo o conteúdo da irreversibilidade estava contido nas *condições iniciais* altamente *improváveis* estipuladas para o sistema físico, e não nas equações de movimento.

Muito embora, na década de 1890, a interpretação estatística para a entropia tenha sido fortemente criticada até mesmo por Planck – que, à época, estava filosoficamente alinhado com o positivismo de Mach e assumia uma atitude hostil com respeito ao atomismo –, os múltiplos desenvolvimentos da termodinâmica na direção de problemas em físico-química, no eletromagnetismo e nas reações químicas, permitiram que a mecânica estatística se estabelecesse de modo sólido. A esse respeito, foi fundamental a contribuição de Josiah Willard Gibbs (1839 – 1903). Gibbs iniciou suas investigações em termodinâmica em 1871. Porém, sua mais importante invenção, a *teoria de ensembles*, surgiu apenas em 1893. Com ela, o fundamento estatístico da termodinâmica se tornou claro e definitivo. Fundamentalmente alicerçada sobre o *princípio de energia*, a mecânica estatística de Boltzmann e de Gibbs representou uma renovação – em bases novas e insuspeitadas – do programa de explicação mecanicista, na medida em que, claramente, voltava a professar o compromisso metafísico com a redução dos fenômenos macroscópicos à realidade física mais fundamental de mecanismos microscópicos invisíveis. Contudo, o legado maior da mecânica estatística para o novo mundo da física quântica estaria em seus *métodos*, não em seus compromissos metafísicos.

### 3 Leis: Kirchhoff, Stefan-Boltzmann, Wien e Rayleigh-Jeans

O teorema de equipartição havia se tornado uma pedra angular para a aplicação dos princípios da mecânica estatística aos problemas termodinâmicos da matéria e da radiação. Contudo, os sucessivos fracassos na obtenção da razão dos calores específicos dos gases começaram a criar uma fratura na compreensão da recém-descoberta conexão entre os mundos microscópico e macroscópico. Mesmo após Boltzmann ter formulado um argumento para mostrar como *cinco graus de liberdade* (por átomo) conduziriam a uma resposta realmente próxima do valor experimental esperado para gases diatômicos,  $\gamma \approx 1,4$ , a verdade é que apenas no contexto da *física quântica* foi possível explicar por que alguns graus

de liberdade não eram excitados a baixas temperaturas, *violando o teorema de equipartição*. A esses fracassos sucederam outros – em problemas que não eram, necessariamente, mutuamente interconectados, nem eram centrais aos desenvolvimentos nas décadas finais do século XIX, mas que, à medida que resistiam às tentativas de solução, foram ganhando progressivamente importância. De fato, o que ocorria era que os limites da capacidade da física clássica e da adequação da visão mecanicista estavam sendo alcançados em várias outras frentes de investigação da estrutura da matéria – espectroscopia de átomos e de moléculas, efeito fotoelétrico, espalhamento de raios-X, radioatividade, etc. Além do problema dos calores específicos, também diretamente relacionado com o problema da validade do teorema de equipartição era o do *equilíbrio entre a radiação e a matéria*, mais especificamente, o problema de explicar *o espectro da radiação térmica em equilíbrio com as paredes da cavidade de um corpo negro*.

A primeira peça do quebra-cabeças havia sido posta já em 1859, quando Kirchhoff demonstrou que o espectro radiação de corpo negro não dependia da natureza específica das paredes. Mais especificamente, ele demonstrou que a *razão entre as radiações térmicas absorvida ( $j_v$ ) e emitida ( $\alpha_v$ ) é igual à radiação espectral  $B_v$  de um corpo negro perfeito, uma função universal do comprimento de onda (ou da frequência e da temperatura  $T$ )*:

$$\alpha_v B_v(T) = j_v$$

A segunda peça do quebra-cabeças foi fornecida por Boltzmann, em 1884, ao derivar a chamada *lei de Stefan-Boltzmann*, segundo a qual a energia total irradiada por um corpo negro, por unidade de área, por unidade de tempo, em todo o intervalo de frequências, é proporcional à quarta potência da temperatura  $T$ . Boltzmann partiu do modelo proposto por Maxwell para tratar o problema da radiação eletromagnética em cavidades com paredes refletoras (condutores). De fato, a expressão da equação de estado que relaciona a pressão da radiação na cavidade com a sua densidade conduz ao resultado:

$$p = \frac{1}{3}\epsilon \quad \Rightarrow \quad \epsilon \propto T^4.$$

A peça seguinte foi fornecida por Wilhelm Wien (1864 – 1928) ao demonstrar, em 1894, que a distribuição de energia eletromagnética, em função do comprimento de onda  $\lambda$ , deveria ser da forma  $\rho(\lambda, T) = \lambda^{-5}\phi(\lambda T)$ . Em sua demonstração, Wien partiu de três premissas, estabelecidas por ele próprio. Em primeiro lugar, a *lei de deslocamento*, que estabelecia que, em uma expansão adiabática da radiação, o comprimento de onda e a temperatura eram inversamente proporcionais:  $\lambda T = \text{cte}$ . Em segundo lugar, que, no equilíbrio entre cavidade e radiação, os únicos parâmetros que podiam caracterizá-lo eram  $\lambda$  e  $T$ . Por fim, que, em uma expansão adiabática (i.e., quasiestática), a forma da função devia permanecer invariante. A conclusão se segue, então, da combinação dessas premissas com a lei de Stefan-Boltzmann:

$$\rho(\lambda, T)\lambda^5 = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad \rho(\lambda, T) = \lambda^{-5}\phi(\lambda T)$$

De qualquer modo, a função  $\phi(\lambda T)$  só podia ser obtida experimentalmente. Em 1896, Wien propôs que ela deveria ser da forma  $\phi(\lambda T) = A \exp(-B/\lambda T)$ , com  $A$  e  $B$  constantes positivas. A *lei de Wien*, expressa em função do comprimento de onda e, alternativamente, da frequência da radiação, é, assim:

$$\rho(\lambda, T) = A\lambda^{-5} \exp(-B/\lambda T)$$

$$u(\nu, T) = A \frac{8\pi\nu^3}{c^3} \exp(-B\nu/T)$$

Entretanto, os sucessivos experimentos realizados na região visível do espectro (1899) e na região infravermelha (1900) – limite de baixas frequências e altas temperaturas – evidenciaram que a lei de Wien estava errada.

#### 4 Rayleigh e Planck: a relação entre distribuição de energia da radiação e energia média por grau de liberdade.

*“The study of conservative damping seems to me to be of great importance, since it opens up the prospect of a possible general explanation of irreversible processes by means of conservative forces – a problem that confronts research in theoretical physics more urgently every day.”* (Planck, 1895, apud Klein, 1967)

Também por volta de 1900, William Strutt (*Lord Rayleigh*, 1842 – 1919) descobriu, teoricamente, um problema igualmente grave na região ultravioleta – a divergência  $\rho(\lambda)$ , no limite  $\lambda \rightarrow 0$ . Considerando que a radiação no interior da cavidade podia ser modelada como um conjunto (infinito) de ondas estacionárias (modos normais de um oscilador harmônico), Rayleigh demonstrou que a distribuição da energia deveria ser tal que, no limite de altas temperaturas,

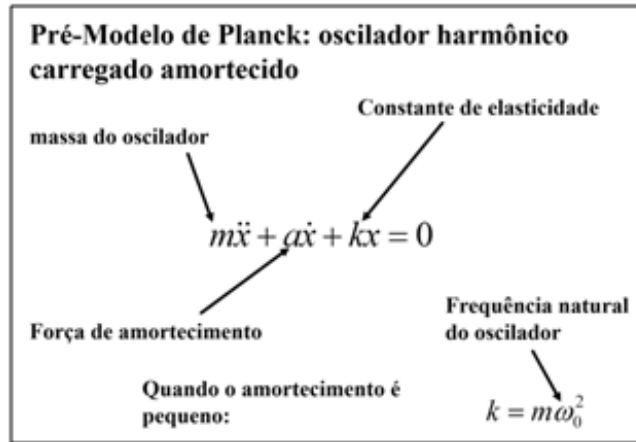
$$\rho(\lambda, T) = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}$$

Essa é a expressão do que ficou conhecido por *lei de Rayleigh-Jeans*. A chamada *catástrofe ultravioleta* colocava o teorema da equipartição em cheque, pois era resultado direto de sua aplicação.

As peças finais do quebra-cabeças foram obra de Max Planck (1858 – 1947). Planck, motivado pela natureza do trabalho puramente clássico de Wien, começou a se aproximar do problema do corpo negro a partir de 1894, através de investigações mais gerais envolvendo a conexão entre a termodinâmica fora do equilíbrio e a teoria eletromagnética. De fato, Planck já havia reconhecido a necessidade de modelar a *interação* da radiação com os átomos das paredes da cavidade. Por outro lado, a característica de *universalidade* do espectro de radiação era particularmente intrigante e impressionou Planck profundamente. Convencido da existência de uma lei fundamental por detrás desse fenômeno, ele não teve dificuldades em assumir que as paredes da cavidade consistiam de osciladores harmônicos carregados amortecidos, de modo que cada dipolo oscilante absorvia e emitia radiação eletromagnética – um problema que, desde Hertz, havia sido bastante estudado.

Em 1895, ele publicou vários trabalhos sobre o chamado *espalhamento ressonante* de ondas eletromagnéticas planas por *dipolos oscilantes*. No último dos artigos desse ano, Planck definiu um programa de ataque ao problema baseado no que ele chamou de *“amortecimento conservativo”* e idealizou um modelo que consistia em um sistema de dipolos oscilantes em equilíbrio com a radiação, encerrados em uma cavidade perfeitamente refletora. A ideia básica era que a energia perdida pelos osciladores, na forma de radiação, para o interior da cavidade, não devia ser interpretada propriamente como calor, uma vez que ela podia ser recuperada pela reação da radiação sobre os osciladores.

Sobretudo no início de seu trabalho, Planck esteve imbuído de uma série de preconceitos que acabaram por cumprir papel bastante diverso na sequência dos eventos que se seguiram. Se, por um lado, alguns



**Figura 1:** Pré-modelo de Planck.

deles o incentivaram a perseguir uma solução para o problema que estivesse para além dos pressupostos aceitos por parte considerável da comunidade científica, por outro lado, também o impediram de perceber, de imediato, como o problema deveria ser pensado em termos fundamentais. Dentre esses preconceitos, estava uma grande desconfiança com relação à validade do teorema de equipartição e uma confiança absoluta na validade da termodinâmica. Essa era, aliás, uma das facetas do explícito positivismo professado por Planck. Ele estava totalmente convencido da validade *exata* das duas leis da termodinâmica e de que o problema da rota para o equilíbrio não poderia estar assentado sobre as considerações mecânicas e, principalmente, estatísticas, de Boltzmann. Portanto, ele era *contra a definição de entropia estatística*.

Curiosamente, com base no argumento do *Demônio de Maxwell*, Planck concluiu que a segunda lei jamais poderia ser válida em um sistema constituído de partículas. Maxwell, contudo, havia construído o argumento para alcançar o objetivo oposto: demonstrar que um sistema de partículas não podia sustentar a validade da segunda lei, a não ser em termos estatísticos. Porém, em 1898, Boltzmann obrigou Planck a rever sua posição, utilizando-se, aliás, de outro argumento de Maxwell: o de que é impossível derivar, sem considerações extras, exclusivamente com base nas leis fundamentais da física (que são reversíveis), o conteúdo de irreversibilidade da segunda lei.

Mesmo antes de se curvar completamente ao peso dos argumentos de Boltzmann, Planck conseguiu que seu programa alcançasse um primeiro resultado espetacular. Em 1899, ele obteve a *relação entre a densidade de energia da radiação em uma cavidade e a energia média dos osciladores com os quais havia modelado suas paredes*:

$$u(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \bar{E}.$$

Na figura 1 encontra-se um esquema sintético do modelo preliminar adotado por Planck.

Planck começou obtendo a *taxa média de radiação* dos dipolos constituintes do interior da cavidade (figura 2):

$$\frac{d\langle W \rangle}{dt} = \frac{a}{m} \langle W \rangle \equiv -\gamma \langle W \rangle$$

**Energia no Oscilador Amortecido**

Multiplicando a equação de movimento pela velocidade e integrando com respeito ao tempo:

$$(m\ddot{x}) \dot{x} + (a\dot{x}) \dot{x} + (kx) \dot{x} = 0$$

$$\frac{1}{2}m \int_0^t d(\dot{x}^2) + \int_0^t a \dot{x} dt + \frac{1}{2}k \int_0^t d(x^2) = 0$$

Energia Cinética (*K*)    Energia Dissipada (*D*)    Energia Potencial (*U*)

$$K + U = -D \Rightarrow \frac{d}{dt}(K + U) = a\dot{x}^2 = \frac{2a}{m} \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{a}{m} 2K$$

$$\langle K \rangle = \langle U \rangle \Rightarrow \langle K + U \rangle = 2\langle K \rangle = \langle W \rangle \Rightarrow -\frac{d\langle W \rangle}{dt} = \frac{a}{m} \langle W \rangle \equiv \gamma \langle W \rangle$$

**Figura 2:** Energia do Oscilador Amortecido.

Em seguida, ele aplicou a *fórmula de Larmor*

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_{rad} = -\frac{e^2 \ddot{\gamma}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

no regime de oscilações levemente amortecidas para obter uma expressão para o *fator de amortecimento radiativo* (figura 3):

$$\gamma = \frac{\omega_0^2 e^2}{6\pi m \epsilon_0 c^3}$$

e para obter a *média temporal da radiação emitida pelo dipolo* em função de sua frequência natural e de sua amplitude:

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_{radmedia} = -\frac{\omega_0^4 e^2 |x_0|^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

O próximo passo foi considerar a *reação da radiação sobre cada oscilador*, completando o modelo prévio pela introdução de uma força diretiva (figura 4).

Assumindo uma solução harmônica, Planck obteve uma fórmula da *média temporal da radiação emitida pelo dipolo* em função de sua frequência natural e da frequência e amplitude da onda incidente (figura 5):

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_{radmedia} = -\frac{\omega_0^4 e^2 E_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3 m_e^2 [(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 \omega^2]}$$

O cálculo da taxa de radiação média total emitida pelo dipolo em interação com todas as ondas de diferentes amplitudes pode ser realizado pela integração em todo o intervalo de frequências, mas, assumindo o fato de que ela apresenta um pico em torno da frequência natural do oscilador (frequência ressonante), Planck

**Aplicação da Fórmula de Larmor: oscilações levemente amortecidas**

$$x = |x_0| \cos(\omega_0 t) \Rightarrow \ddot{x} = -\omega_0^2 |x_0| \cos(\omega_0 t)$$

$$-\left(\frac{dW}{dt}\right)_{rad} = \frac{e^2 \dot{x}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \Rightarrow -\left(\frac{dW}{dt}\right)_{rad} = \frac{\omega_0^4 e^2 |x_0|^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \cos^2(\omega_0 t)$$

$$\langle \cos^2(\omega_0 t) \rangle = \frac{1}{2} \Rightarrow -\left(\frac{dW}{dt}\right)_{rad\text{média}} = \frac{\omega_0^4 e^2 |x_0|^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

$$\langle W \rangle \equiv \langle K + U \rangle = 2\langle K \rangle = \frac{1}{2} m |x_0|^2 \omega_0^2$$

$$-\left(\frac{dW}{dt}\right)_{rad\text{média}} = \gamma \langle W \rangle = \gamma \frac{1}{2} m |x_0|^2 \omega_0^2 \rightarrow \gamma = \frac{\omega_0^2 e^2}{6\pi m \epsilon_0 c^3}$$

Figura 3: Aplicação da Fórmula de Larmor.

**Modelo de Planck: oscilador harmônico carregado amortecido e forçado**

Frequência do oscilador  $\rightarrow \ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eE_0 \exp(i\omega t)}{m_e}$

Força da radiação sobre o oscilador  $\rightarrow \frac{eE_0 \exp(i\omega t)}{m_e}$

Frequência da onda incidente  $\rightarrow \omega$

Fator de amortecimento radiativo  
 $\gamma \ll 1 \Rightarrow \gamma = \frac{e^2 \omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 m_e c^3}$

Observe que o fator de amortecimento radiativo só depende de constantes fundamentais e da frequência natural dos osciladores. Como as ondas na cavidade podem restaurar a energia dos osciladores, Planck denominou o fenômeno de amortecimento conservativo.

Figura 4: Modelo de Planck.

**Observe a necessidade de se obter o módulo quadrado da amplitude.**

$$-\left(\frac{dW}{dt}\right)_{rad\text{média}} = \frac{\omega_0^4 e^2 |x_0|^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eE_0 \exp(i\omega t)}{m_e}$$

Solução tentativa:  $x = |x_0| \exp(i\omega t)$

$$|x_0|^2 = \frac{e^2 E_0^2}{m_e^2 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]}$$

$$-\left(\frac{dW}{dt}\right)_{rad\text{média}} = \frac{\omega_0^4 e^2 E_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3 m_e^2 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]}$$

Figura 5: Uso do módulo ao quadrado da amplitude.

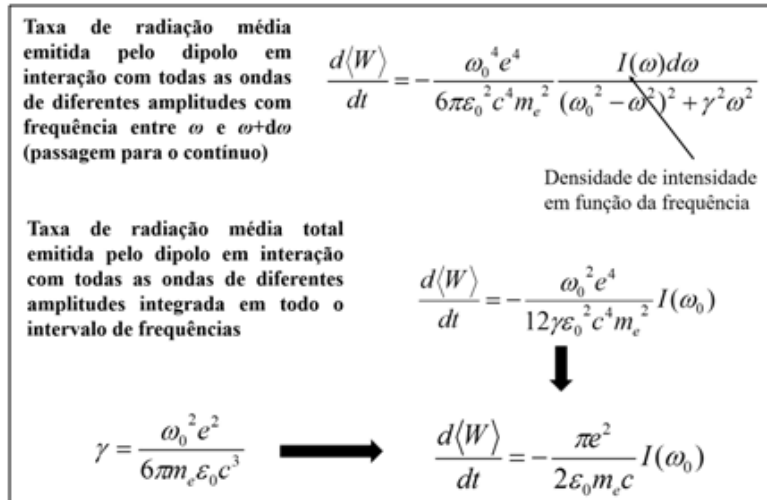


Figura 6: Taxa de radiação média.

fez uma aproximação para obter a taxa média de perda radiativa do dipolo em função da intensidade da reação da radiação na frequência ressonante (figura 6):

$$\frac{d\langle W \rangle}{dt} = - \frac{\pi e^2}{2\epsilon_0 m_e c} I(\omega_0)$$

Por fim, comparando a expressão geral obtida para a taxa de radiação do oscilador amortecido (figura 2) – generalizada para incluir todas as polarizações – com a expressão correspondente ao tratamento que inclui a reação da radiação (figuras 5 e 6), Planck obteve o resultado já enunciado para a relação entre a densidade espectral e a média de energia dos osciladores (figura 7):

$$u(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \bar{E}.$$

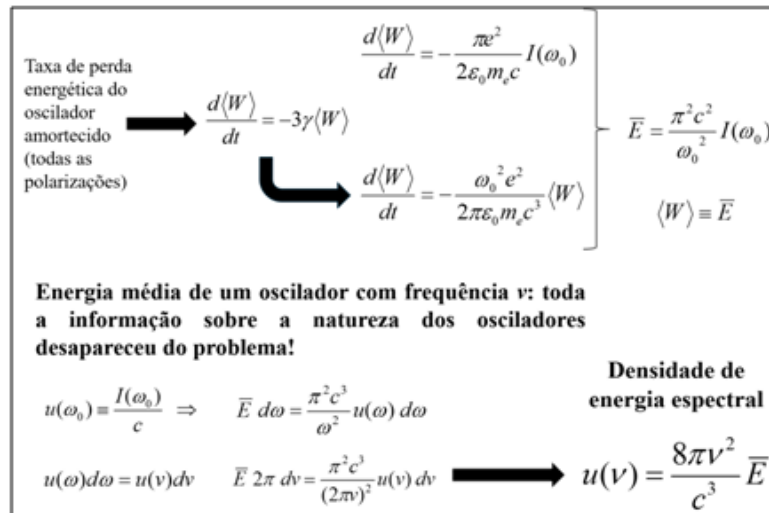
Um fato absolutamente notável com respeito ao resultado obtido é o de que toda a informação sobre a natureza dos osciladores desapareceu do problema, o que estava em pleno acordo com o que Kirchhoff havia demonstrado: o espectro da radiação é independente da natureza das paredes. Agora outro fato realmente notável é que o teorema de equipartição prevê, para o caso de um oscilador harmônico, que possui dois graus de liberdade, que:

$$\bar{E} = 2 \frac{1}{2} kT,$$

e, portanto, a densidade espectral *deveria* ser dada por:

$$u(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT.$$

Mas esse é *exatamente* o resultado obtido por Rayleigh (e corrigido por Jeans), que havia chegado a ele por um caminho completamente diferente: ao invés dos osciladores, ele tratou diretamente com as



**Figura 7:** Energia média de um oscilador.

ondas eletromagnéticas encerradas em uma caixa refletora, cujos modos de oscilação independentes são os graus de liberdade. A história subsequente tem a ver com o modo como Planck, parcialmente motivado pelos seus preconceitos, mas, sobretudo, pela necessidade de salvar os fenômenos, decidiu não seguir o caminho que, aparentemente, era o único, em vista do Princípio de Equipartição.

## 5 Salvando os fenômenos: a Fórmula de Planck.

Pelo lado experimental, grandes dificuldades estavam sendo enfrentadas no problema da obtenção de precisão suficiente para que propostas teóricas diversas pudessem ser eficientemente decididas. A despeito disso, a lei de Wien parecia estar em excelente acordo com os dados disponíveis por volta de 1897, de acordo com os experimentos realizados, principalmente, por Otto Lummer, Ferdinand Kurlbaum, Ernst Pringsheim e Heinrich Rubens.

Para Planck, não parecia pairar dúvidas sobre a validade da lei de Wien e, estando ele mais preocupado com os problemas em torno da validade exata da segunda lei da termodinâmica, seu passo seguinte foi, entre 1899 e 1900, encontrar a entropia termodinâmica que recuperava a lei de Wien (figura 8).

O panorama, entretanto, mudou radicalmente quando, em novos experimentos realizados em outubro de 1900, Rubens e Kurlbaum demonstraram, para além de qualquer dúvida, que a lei de Wien não era satisfeita no limite de altas temperaturas e baixas frequências, região na qual o espectro deve ser proporcional à temperatura. Porém, a lei de Wien implicava, nesse limite, que o espectro seria independente da temperatura.

Quando esses resultados chegaram ao conhecimento de Planck, em questão de poucos dias ele foi capaz de propor a primeira fórmula bem-sucedida para a distribuição de energia espectral:

$$\rho(\nu, T) = \frac{C\nu^3}{\exp(B\nu/T) - 1},$$

**Entropia termodinâmica compatível com a lei de Wien (junho de 1900):**

$$\left. \begin{aligned}
 u(\nu) &= \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \bar{E} && \text{Relação de Planck} \\
 u(\nu) &= A \frac{8\pi\nu^3}{c^3} e^{-B\nu/T} && \text{Lei de Wien}
 \end{aligned} \right\} \bar{E} = A\nu e^{(-B\nu/T)} \Rightarrow$$

Entropia termodinâmica de um oscilador (Wien)

$$\Rightarrow \frac{1}{T} = -\frac{1}{B\nu} \ln \frac{\bar{E}}{A\nu} \quad \left\{ \begin{aligned}
 S &= -\frac{\bar{E}}{B\nu} \left( \ln \frac{\bar{E}}{A\nu} - 1 \right) \\
 \left( \frac{\partial S}{\partial \bar{E}} \right)_\nu &= \frac{1}{T} \\
 \left( \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{E}^2} \right)_\nu &= -\frac{1}{B\nu} \frac{1}{\bar{E}}
 \end{aligned} \right.$$

Segunda lei da termodinâmica

Válido no limite:  $\frac{\nu}{T} \gg 1$

**Figura 8:** Entropia termodinâmica.

**On an improvement of Wien's spectral distribution (Planck, outubro de 1900)**  
 Análise termodinâmica da fórmula de Rayleigh-Jeans

$$\left. \begin{aligned}
 u(\nu) &= \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT \\
 u(\nu) &= \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \bar{E}
 \end{aligned} \right\} \bar{E} \propto T$$

$$\left( \frac{\partial S}{\partial \bar{E}} \right)_\nu = \frac{1}{T} \quad \left\{ \begin{aligned}
 \left( \frac{\partial S}{\partial \bar{E}} \right)_\nu &\propto \frac{1}{\bar{E}} \Rightarrow \left( \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{E}^2} \right)_\nu \propto \frac{1}{\bar{E}^2}
 \end{aligned} \right.$$

Segunda lei da termodinâmica

Válido no limite:  $\frac{\nu}{T} \ll 1$

**Figura 9:** Melhoria da Lei de Wien (outubro de 1900).

cujas duas constantes livres,  $C$  e  $B$ , permitiram ajustar perfeitamente os resultados experimentais. Porém, a fórmula de Planck era apenas empírica. Isso significa que, além de não ter sido proposta com base nos princípios de qualquer teoria, ela *nada tinha a ver com a ideia de quantização*, embora já apresentasse a forma correta do que passaria a ser conhecido por *lei de Planck*.

O modo como Planck chegou em sua expressão empírica é digna de nota, seja porque ele se utilizou de um argumento *ad hoc*, mostrando como uma *interpolação matemática* entre a lei de Wien – válida no limite de altas frequências e baixas temperaturas – e a fórmula de Rayleigh-Jeans – válida no limite de baixas frequências e altas temperaturas – reproduzia os espectros observados, seja porque ele obteve sucesso procurando estudar a *relação entre energia e entropia*, ao invés de seguir pela abordagem tradicional, que sempre procurou estudar a relação entre energia e temperatura. Inclusive, já nessa ocasião, *ele obteve a expressão da entropia termodinâmica correspondente*, ainda que dependente das constantes livres  $C$  e  $B$ .

Planck começou por realizar uma análise termodinâmica da lei de Rayleigh-Jeans de forma completamente análoga à já previamente realizada para a lei de Wien (figura 9).

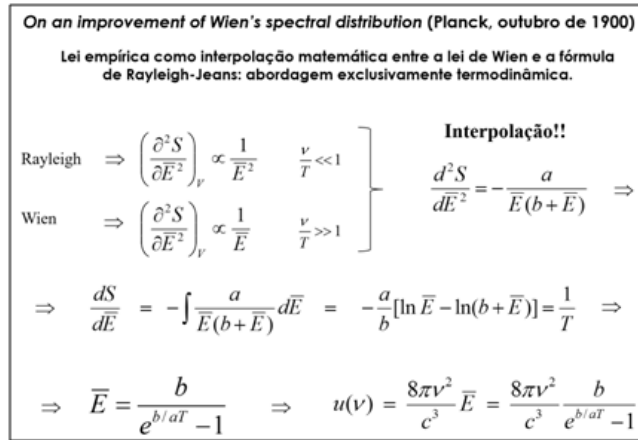


Figura 10: Melhoria da Lei de Wien (outubro de 1900) e Interpolação.

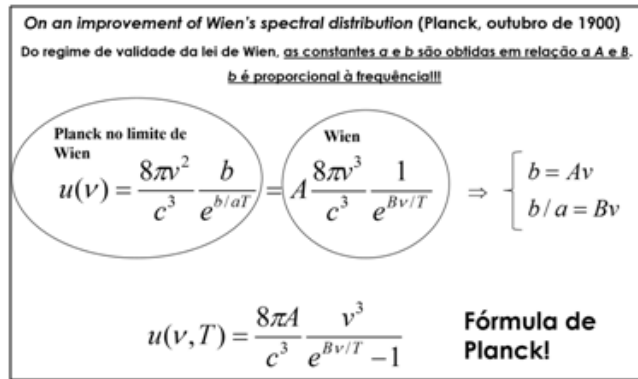


Figura 11: Melhoria da Lei de Wien (outubro de 1900) e Interpolação.

O objetivo que ele tinha em mente era comparar as formas funcionais de acordo com as quais a concavidade da relação termodinâmica fundamental dependia da energia nos dois limites em que se sabia que as leis de Wien e Rayleigh-Jeans estavam de acordo com os dados experimentais da época. O resultado do procedimento foi impressionante. Usando a relação previamente deduzida para a densidade de energia espectral como função da energia média dos osciladores, Planck chegou à fórmula abaixo (figura 10), dependente das constantes livres  $a$  e  $b$ , usadas no processo de interpolação:

$$u(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \bar{E} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{b}{e^{b/aT} - 1}.$$

Em seguida, ele analisou o limite de sua própria fórmula para obter as relações entre os parâmetros livres  $A$  e  $B$ , oriundos da lei de Wien, e  $a$  e  $b$  (figura 11).

De igual importância, entretanto, foi a obtenção da entropia termodinâmica correspondente à sua fórmula (figura 12):

$$S_{term} = a \left[ \left(1 + \frac{\bar{E}}{b}\right) \ln \left(1 + \frac{\bar{E}}{b}\right) - \frac{\bar{E}}{b} \ln \frac{\bar{E}}{b} \right].$$

**On an improvement of Wien's spectral distribution (Planck, outubro de 1900)**  
**Entropia termodinâmica da fórmula de Planck**

$$\frac{dS}{d\bar{E}} = -\frac{a}{b} [\ln \bar{E} - \ln(b + \bar{E})]$$

$$S_{\text{term}} = a \left[ \left(1 + \frac{\bar{E}}{b}\right) \ln \left(1 + \frac{\bar{E}}{b}\right) - \frac{\bar{E}}{b} \ln \frac{\bar{E}}{b} \right]$$

Entropia termodinâmica por oscilador  
 Observe que  $b$  é proporcional à frequência!!  $b \propto \nu$

**Figura 12:** Melhoria da Lei de Wien (outubro de 1900) - Entropia termodinâmica.

## 6 A “reconciliação” de Planck com Boltzmann

“On the very day when I formulated this law, I began to devote myself to the task of investing it with a true physical meaning. This quest automatically led me to study the interrelation of entropy and probability – in other words, to pursue the line of thought inaugurated by Boltzmann.” (Planck, 1950)

Apesar do sucesso, Planck sabia que havia inconveniências. Primeiramente, sua fórmula era empírica: ainda que fundada em argumentos termodinâmicos, fora obtida com suporte na experiência e, portanto, não era o caso de se pensar que ele estava de posse de uma verdadeira explicação. Por esse mesmo motivo, ela carecia de suficiente poder preditivo, em virtude da presença de parâmetros livres. Vale ressaltar que, não há nenhum resquício, nesse momento, de qualquer ideia de quantização, nem isso era sequer uma preocupação que pudesse estar no horizonte teórico da época. Logo na sequência da apresentação de seu resultado, ele se lançou à procura por uma justificação mais sólida.

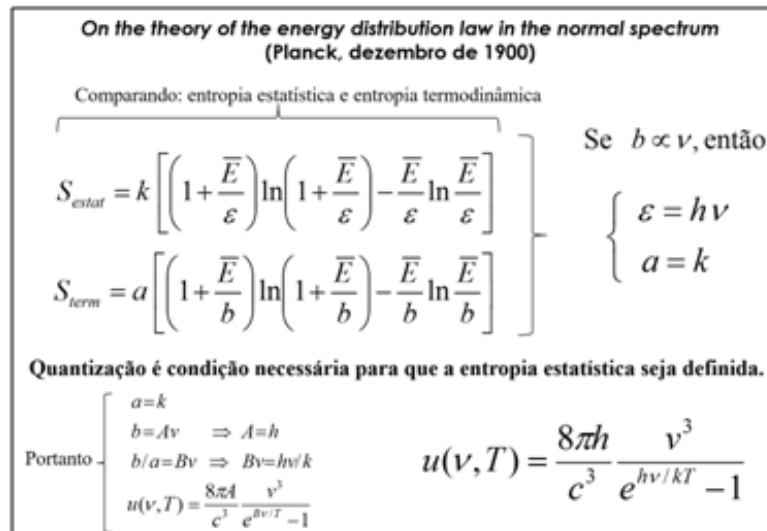
Planck julgou tê-la encontrado ao abandonar sua abordagem exclusivamente termodinâmica e se voltar para o modo como Boltzmann havia tratado o problema de contagem na definição da entropia *estatística* e na obtenção da distribuição mais provável no equilíbrio. Esse modo essencialmente exigia que um expediente meramente formal – a divisão da energia total em quantidades discretas – fosse apenas um passo intermediário e que, ao final do processo, o *limite do contínuo* devesse ser tomado. Com efeito, Planck imaginou o problema de calcular o número total de modos de distribuir a energia total  $E_N = r\varepsilon$  entre  $N$  osciladores de tal modo que a energia total fosse um múltiplo inteiro ( $r$ ) de uma quantidade finita  $\varepsilon$  (figura 13).

Em seguida, *ele realizou um passo completamente arbitrário: postulou que esse número total de modos deveria ser a probabilidade  $\Omega$  a ser considerada na expressão da entropia estatística total de  $N$  partículas,  $S_N = k \log \Omega$*  (figura 14).

O fato é que *esse passo carecia completamente de qualquer justificativa e sentido, porque um número total de possibilidades não é uma probabilidade*. O resultado mais interessante, contudo, foi que ele pode, desse modo, obter a *entropia estatística média por oscilador*:

$$S_{\text{estat}} = k \left[ \left(1 + \frac{\bar{E}}{\varepsilon}\right) \ln \left(1 + \frac{\bar{E}}{\varepsilon}\right) - \frac{\bar{E}}{\varepsilon} \ln \frac{\bar{E}}{\varepsilon} \right]$$





**Figura 15:** Teoria da lei de distribuição de energia (dezembro de 1900).

o que o permitiu fazer uma *comparação direta com a sua entropia termodinâmica* (figura 15). Foi com base nessa comparação que o resultado mais surpreendente finalmente apareceu: *a quantidade finita  $\varepsilon$  era proporcional à frequência da radiação e, por isso, não podia ser levada ao limite zero. Ou seja, a discretização da energia era uma condição absolutamente necessária para que a entropia estatística pudesse ser definida.*

Portanto, havia dois problemas que ainda ficaram por ser resolvidos. Primeiramente, era claro para todos, inclusive para o próprio Planck, que a sua definição de probabilidade não fazia sentido, mas era preciso explicar por que ela funcionava. Em segundo lugar, havia também uma inconsistência lógica, em seu tratamento do problema: a discretização no procedimento era incompatível com o tratamento clássico (contínuo) que Planck usava para a energia irradiada pelos osciladores. Além disso, pairava sobre a história também uma dúvida: por que Planck se decidiu a dar esses passos que ele certamente sabia serem contraditórios?

A essência da demonstração estava no modo como ele chegou à entropia estatística  $S$ . Em última instância, o que Planck fez era realmente equivalente a impor que *a energia trocada entre os osciladores e a própria radiação fosse discretizada*. Isso significava que, para cada frequência  $\nu$ , a energia de cada oscilador só podia ser trocada com a radiação em *quantidades discretas*, de valor  $\varepsilon = h\nu = hc/\lambda$  – em que  $h$  era uma constante que se tornaria, juntamente com a velocidade da luz  $c$  e a constante gravitacional  $G$ , uma das três *constantes fundamentais da natureza*: a *constante de Planck*. Como ficou claro, o procedimento de Planck era uma variação do procedimento de Boltzmann que, se fosse estritamente seguido, deveria exigir o limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Apesar da nova demonstração, sua natureza extravagante e, principalmente, a ausência de justificativa com respeito ao último passo mostram que o argumento de Planck ainda tinha natureza *ad hoc*.

Uma das interpretações em voga sugere que Planck se decidiu a dar passos tão corajosos porque tinha em vista exclusivamente a recuperação da sua já previamente alcançada *entropia termodinâmica*. De fato,

**O que Planck deve ter realmente feito?**

Um possível explicação do procedimento de Planck (por L. Rosenfeld e M. J. Klein (1977): trabalho de trás para frente:

$$S = k \left[ \left( 1 + \frac{E}{\varepsilon} \right) \ln \left( 1 + \frac{E}{\varepsilon} \right) - \frac{E}{\varepsilon} \ln \frac{E}{\varepsilon} \right] \Rightarrow P = e^{\frac{S}{k}} \Rightarrow P = \frac{(N+r-1)!}{r!(r-1)!}$$

**Figura 16:** O que Planck deve ter realmente feito.

com isso, bastou que ele utilizasse a segunda lei da termodinâmica, na forma da relação entre energia e entropia,  $(\partial S / \partial E)_V = T^{-1}$ , para deduzir a forma correta que deveria ser imposta para a energia média  $E_V(T)$  e, desse modo, recuperar a sua fórmula empírica (figura 16).

A propósito, observe-se que Planck também não realizou a quantização do campo eletromagnético – feito realizado por Einstein, com o conceito de *fóton*, no contexto de sua solução para o problema do *efeito fotoelétrico*. (A propósito, em 1905, Einstein, no artigo intitulado *On a heuristic viewpoint concerning the production and transformation of light* mostrou como solucionar o problema de modo estritamente termodinâmico, porém, tratando a radiação quantizada (fótons).) Isso, entretanto, representava uma clara contradição: enquanto a energia irradiada pelos osciladores se distribuía *continuamente* através do campo, ela não era emitida continuamente ao longo da oscilação, mas descontinuamente, e apenas quando ocorria uma abrupta variação na amplitude de cada oscilador.

Esses fatos estiveram na base do motivo pelo qual a nova *hipótese quântica* seria encarada com muita desconfiança, até mesmo pelo próprio Planck. Até pelo menos 1911, ele ainda considerava a discretização um mero artifício formal e procurou obstinadamente reconciliar sua descrição com a física clássica. Os trabalhos de Einstein, nesse sentido, foram fundamentais para que a hipótese passasse a ser, paulatinamente, assimilada no seio da comunidade científica. Contudo, algum tempo ainda seria necessário para que uma verdadeira *mecânica quântica* viesse a ser construída.

## Referências

- [1] Kirchhoff, G. (1859). On the connection between emission and absorption of light and heat, *Berlin Monatsberichte*, pp. 783–787.
- [2] Klein, M. J. (1967). The beginnings of the quantum theory, in *History of Twentieth Century Physics: 57th Varenna International School of Physics, ‘Enrico Fermi’*, ed. Weiner, C., volume 57, pp. 1–39. New York and London: Academic Press.
- [3] Longair, M. S. *Theoretical Concepts in Physics*. Cambridge University Press, 1984.
- [4] Longair, M. S. *Quantum Concepts in Physics*. Cambridge University Press, 2013.
- [5] Planck, M. (1900). On an improvement of Wien’s spectral distribution, *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*, 2, 202–204. Also published in Planck’s collected papers: *Physikalische*

*Abhandlungen und Vorträge*, 1, pp. 687–689, Braunschweig: Friedr. Vieweg und Sohn. English Translation: *Planck's Original Papers in Quantum Physics*, (1972), annotated by H. Kangro, pp. 38–45. London: Taylor and Francis.

- [6] Planck, M. (1900). Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspektrum, *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*, 2, 237–245. Also published in Planck's collected papers: *Physikalische Abhandlungen und Vorträge*, 1, pp. 698–706, Braunschweig: Friedr. Vieweg und Sohn. English translation: Hermann, A. (1971). *The Genesis of Quantum Theory (1899–1913)*, p. 10. Cambridge, Mass: MIT Press.
- [7] Planck, M. (1910). Letter to W. Nernst of 11 July 1910, in *Black-Body Theory and the Quantum Discontinuity 1894–1912*, ed. Kuhn, T., p. 230. Oxford: Clarendon Press (1978).
- [8] Planck, M. (1925). *A Survey of Physics*. London: Methuen and Company.
- [9] Planck, M. (1950). *Scientific Autobiography and Other Papers*. London: Williams and Norgate.
- [10] Polito, A.M.M. (2016) *A Construção da Estrutura Conceitual da Física Clássica*. São Paulo: Livraria da Física.
- [11] Rayleigh, J. W. (1900). Remarks upon the law of complete radiation, *Philosophical Magazine*, 49, 539–540. Rayleigh's paper is also contained in *Scientific Papers by John William Strutt, Baron Rayleigh, 1892–1901. Vol. 4*. Cambridge: Cambridge University Press. Rayleigh, J. W. (1902). *Scientific Papers by John William Strutt, Baron Rayleigh, 1892–1901, Vol. 4*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [12] Wien, W. (1894). Temperatur und Entropie der Strahlung, *Annalen der Physik*, 52, 132–165.
- [13] Wien, W. (1896). Über die Energieverteilung im Emissionspektrum eines schwarzen Körpers, *Annalen der Physik*, 58, 662–669.