



Physicæ Organum

v. 4, n. 2 (2018)

4 anos

Aeronautas e radiação cósmica: aspectos físicos e jurídicos de uma alarmante exposição ocupacional

Gabriel Rübinger-Betti, Gabriel Sousa Diniz

The One-dimensional Fuzzy Ising Model

Renatto Barbosa de Souza

A videoanálise de uma bola saltitante: um estudo sobre as perdas de energia utilizando aplicativos para smartphones

Francisco Adeil Gomes de Araújo, Meirivâni Meneses de Oliveira, Eloneid Felipe Nobre, Alexandre Gonçalves Pinheiro, Marcony Silva Cunha

Nota editorial

A presente edição teve sua composição final realizada posteriormente à sua publicação original, com o objetivo de padronização editorial e atribuição de identificadores digitais (DOIs) aos artigos. Esse processo não alterou o conteúdo dos trabalhos originalmente publicados.

A equipe desta edição foi composta por Olavo Leopoldino da Silva Filho como editor gerente, Fabio Luis de Oliveira Paula e Leonardo Luiz e Castro como editores de layout e capa.

A equipe editorial agradece à Biblioteca Central da Universidade de Brasília (BCE/UnB) pelo apoio na configuração e no registro dos DOIs da revista, especialmente à bibliotecária Luísa Chaves Café.

— Leonardo Luiz e Castro, responsável pela composição final, 2026

Editorial Note

This issue had its final composition prepared after its original publication, with the aim of editorial standardization and the assignment of digital object identifiers (DOIs) to the articles. This process did not alter the content of the originally published works.

The editorial team for this issue consisted of Olavo Leopoldino da Silva Filho (Managing Editor), Fábio Luís de Oliveira Paula, and Leonardo Luiz e Castro (Layout and Cover Editors).

The editorial team thanks the Central Library of the University of Brasília (BCE/UnB), especially librarian Luísa Chaves Café, for their support in configuring and registering the journal's DOIs.

— Leonardo Luiz e Castro, responsible for the final composition, 2026

Apresentação

Este é mais um número da *Physicae Organum*, completando agora quatro anos de atividades. Agradecemos nossos autores, leitores e avaliadores pela constante colaboração. Desejamos a todos uma boa leitura.

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Aeronautas e radiação cósmica | 1 |
| 2 | The One-dimensional Fuzzy Ising Model | 21 |
| 3 | A VIDEOANÁLISE DE UMA BOLA SALTITANTE | 43 |

Aeronautas e radiação cósmica: aspectos físicos e jurídicos de uma alarmante exposição ocupacional

GABRIEL RÜBINGER-BETTI*

Advogado. Bacharel em Direito pela Universidade de Brasília.

GABRIEL SOUSA DINIZ†

Doutorando em física pela Universidade de Brasília.

Resumo

Estudos demonstram que a categoria dos aeronautas é ocupacionalmente exposta à radiação cósmica, mas pouco se discute no Brasil acerca dessa matéria. A radiação cósmica é um fenômeno natural que consiste de partículas de alta energia originárias do espaço. Ao adentrar a atmosfera terrestre, essas partículas produzem radiação ionizante, perigosa para a saúde humana. Os organismos internacionais de radioproteção consideram que a radiação cósmica na superfície da Terra deve ser desconsiderada para efeitos de regulamentação jurídica. Entretanto, aeronautas e passageiros frequentes de avião estão expostos a doses mais elevadas de radiação devido ao decaimento exponencial da densidade do ar, o que diminui a proteção existente no solo. Em voos isolados, esse excesso de radiação não é alarmante, mas, para aqueles em constante voo, a exposição ocorre de maneira contínua e elevada, o que representa uma série de riscos à saúde. Neste trabalho abordaremos os aspectos físicos e jurídicos da exposição ocupacional a radiação cósmica da categoria dos aeronautas e as mudanças necessárias para uma regulamentação mais adequada do fenômeno no Brasil.

Palavras-chave: Aeronautas; Radiação cósmica; Exposição ocupacional; Direito do Trabalho; Direito Previdenciário.

1 Introdução

Raios cósmicos são partículas de alta energia, podendo atingir energias superiores a 10^{20} eV (Elétron-Volt) (KOTERA e OLINTO, 2011), enquanto a energia alcançada pelo laboratório CERN com o LHC (Large Hadron Colider) está na ordem de grandeza de 10^{12} eV e a energia da radiação cancerígena ultravioleta está entre 3,10 e 124 eV. As partículas que viajam pelo espaço e que, ao atingirem a atmosfera

*E-mail: rubinger.g@gmail.com

†E-mail: gdiniz93@gmail.com

terrestre, promovem uma cascata de partículas em um amplo intervalo de energia. Produz-se, como resultado, radiação ionizante, que comporta uma série de riscos à saúde humana, por conta da alta carga energética desse fenômeno de origem cósmica. Ao atingir o tecido humano, por exemplo, a radiação ionizante pode gerar mutações celulares, uma das causas do câncer (RAFNSSON et al., 2001, p. 6).

Os seres humanos estão expostos à radiação cósmica tanto na superfície da Terra quanto no espaço. Na superfície da Terra, estamos expostos à chamada “radiação cósmica de fundo” (ou background radiation), em níveis que variam de acordo com características geográficas. Esses níveis geralmente não são considerados de risco, e são, via de regra, desconsiderados pelas entidades que regulamentam a radioproteção ao redor do mundo. No espaço, entretanto, os níveis de radiação são mais elevados. Diversos estudos prévios indicam que a dose de radiação recebida por aeronautas durante sua jornada de trabalho é suficiente para considerar a categoria como ocupacionalmente exposta (RAFNSSON et al., 2001, p. 6), despertando preocupações acerca de riscos à saúde. Embora essa questão já esteja sendo debatida há alguns anos por organismos internacionais e pela literatura científica (NIU, 2011, p. 40), o tema permanece pouco estudado no Brasil.

Este trabalho tem como objetivo explorar a questão da exposição ocupacional dos aeronautas à radiação cósmica, esclarecendo os aspectos físicos do fenômeno e as suas consequências jurídicas. Defende-se, em síntese, que a profissão de aeronauta deve ser considerada como ocupacionalmente exposta a radiações ionizantes, sobretudo em comparação com outras profissões em que também ocorre esse tipo de exposição, o que requer uma regulamentação jurídica urgente e a atenção dos organismos de radioproteção. O texto está organizado da seguinte maneira: a primeira seção tem como foco a explicação dos aspectos físicos da radiação cósmica e sua relação com as condições de trabalho da classe aeronauta. A seção seguinte elucida a atual regulamentação jurídica da proteção a radiações ionizantes na legislação regulatória, previdenciária e trabalhista. Finalmente, expõem-se as consequências jurídicas do tratamento da categoria dos aeronautas como ocupacionalmente exposta a radiações ionizantes, e as propostas para uma regulamentação mais adequada do fenômeno.

2 Ambiente e fenomenologia

2.1 O ambiente terrestre

Grande parte da cascata de partículas energéticas provenientes do meio intra- e intergaláctico é barrada pela densa atmosfera terrestre, pois durante a propagação das partículas há colisões com as moléculas atmosféricas que provocam a perda de energia das partículas cósmicas – parte dessas partículas, portanto, são freadas na atmosfera e não nos atingem. Outro mecanismo natural de proteção contra esse fenômeno é o campo magnético da Terra que desvia a trajetória de tais partículas desde grandes altitudes (>500 km), fazendo com que as partículas carregadas desviem sua trajetória da Terra.

Exemplificando a importância do campo magnético terrestre, é sabido que Marte possui uma atmosfera pouco densa se comparada com a Terra. Uma das causas para essa baixa densidade é a ausência de campo magnético marciano, o que permitiu que partículas de alta energia vindas do sol varresse a antiga atmosfera marciana (CHAMBERLAIN, 1978).

A densidade atmosférica decai de maneira exponencial com o aumento da altitude. Assim, maior quantidade de ar está concentrada em baixas altitudes. Trabalhos recentes, tal como Köhn et al. (2015), consideram a densidade atmosférica com uma escala de altura de 8,3 km (um decaimento exponencial com a altitude) – de modo que, nessa altitude, a densidade atmosférica possui aproximadamente 36% do seu valor em solo. Dessa forma, indivíduos em maiores altitudes estão protegidos por uma quantidade inferior de ar do que indivíduos no solo terrestre. Como a altitude de cruzeiro em voo comercial é em média 10 km (ver Figura 1), indivíduos em altitude de voo estão sem a proteção da parte mais densa da atmosfera.

No Brasil, há ainda um outro fator que contribui para uma maior incidência de partículas energéticas: a Anomalia Magnética da América do Sul (AMAS). Esse fenômeno, que atualmente cobre grande parte do território brasileiro, consiste em uma chamada “região de mínimo” no campo magnético terrestre (DORMAN, 2009), o que provoca uma maior incidência de partículas de alta energia na região. Vários satélites, ao passar pela região, não são postos em funcionamento para evitar danos (SMITH et. al., 2005), ilustrada pela Figura 2. Por essa razão, há a possibilidade do espaço aéreo brasileiro possuir níveis maiores de radiação ionizante.

2.2 Raios cósmicos

Raios cósmicos, em geral, são compostos por prótons, partículas alfa e íons mais pesados (como núcleos de ferro), que atingem a Terra em uma taxa de aproximadamente $10^3 \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}$ (GAISSER, 1990). A origem dos raios cósmicos detectados da Terra varia de acordo com sua energia, mas a maior parte dessas partículas é proveniente da nossa própria galáxia.

O Sol é particularmente uma fonte constante de raios cósmicos que atingem a atmosfera da Terra, compostos em sua maioria por prótons. Outras fontes de raios cósmicos galácticos são antigas supernovas que ocorreram dentro da Galáxia. Por sua vez, as partículas mais energéticas, os chamados “raios cósmicos ultrarrelativísticos” (ou seja, com velocidade próxima à da luz) não possuem origem definida atualmente, embora se saiba que sua fonte é extragaláctica. A transição, em termos de energia, para raios cósmicos galácticos e extragalácticos está entre 10^{15} eV e 10^{18} eV , um intervalo grande de energia, que reflete a dificuldade na determinação das fontes desse fenômeno (KOTERA e OLINTO, 2011). Apesar das energias ultra relativísticas que os raios cósmicos podem alcançar, o seu espectro mostra que a componente mais abundante que atinge a Terra possui energia na ordem de 0.1-100 GeV. Isso demonstra que eles são produzidos por fontes no meio interestelar local, as vizinhanças espaciais como o Sol e outras fontes dentro da Galáxia (GAISSER, 1990).

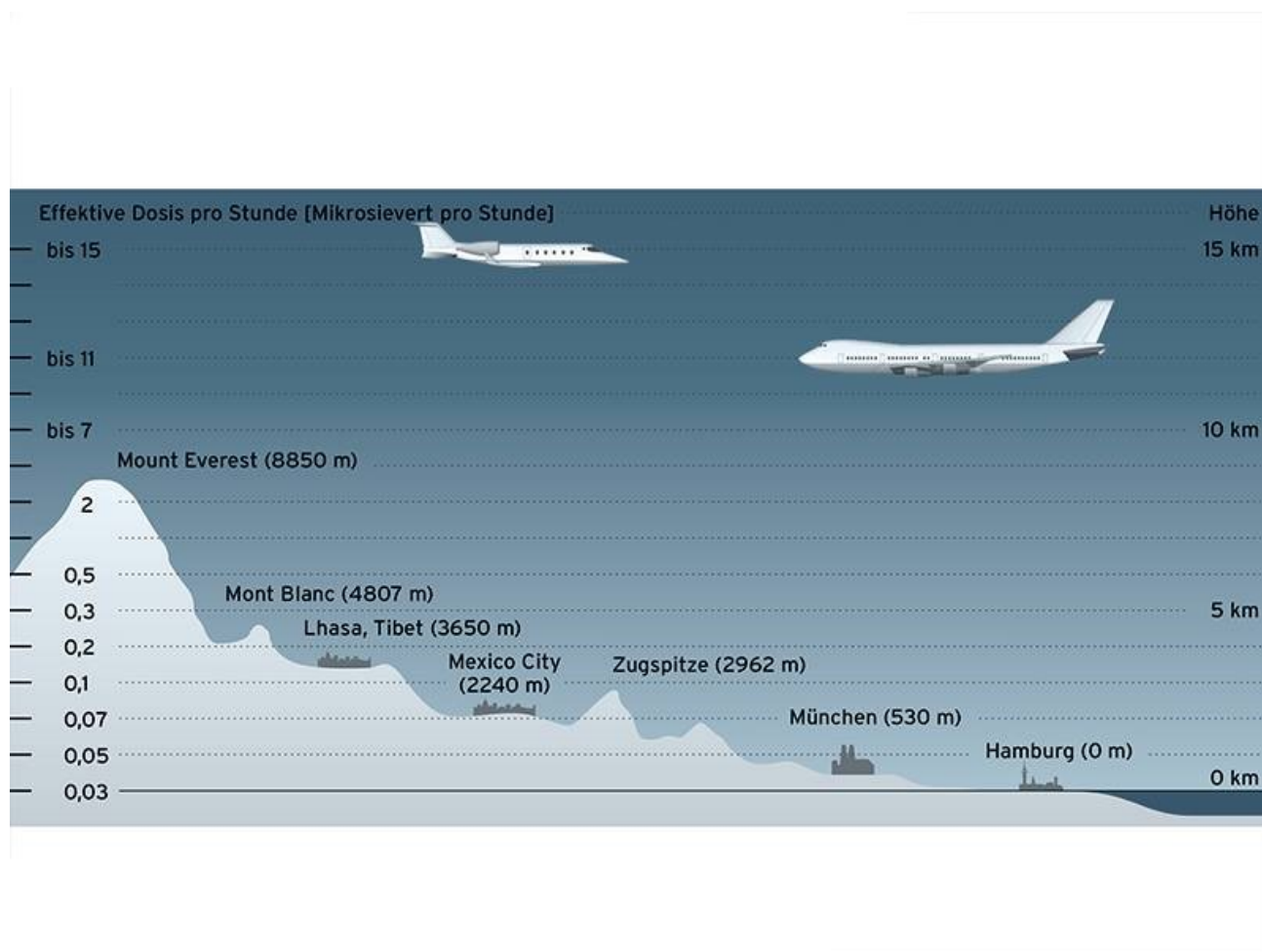


Figura 1: Ilustração da altitude típica de um voo comercial em comparação com a dose efetiva de radiação ionizante por hora (em $\mu\text{Sv/hora}$). Retirada de: <http://www.bfs.de/DE/themen/ion/strahlenschutz/beruf/methodik/fliegendespersonal.html>. Acessado em 20 de dezembro de 2016.

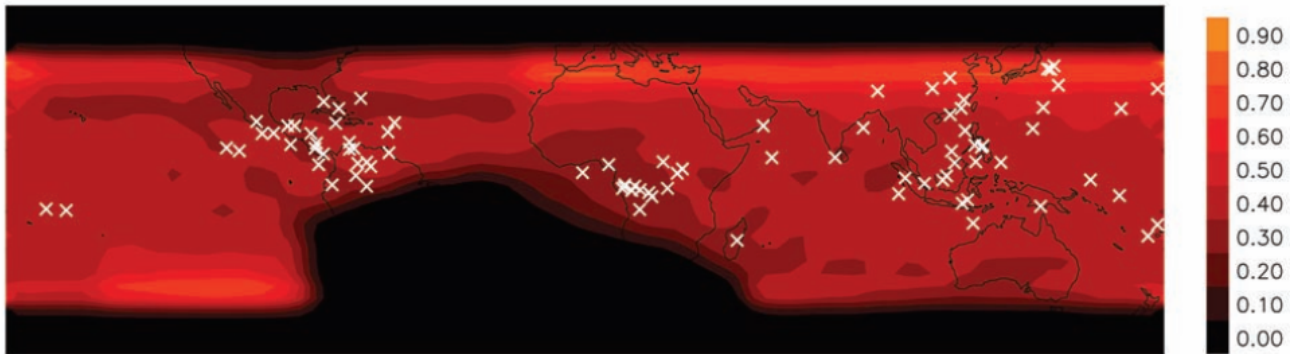


Figura 2: Painel das detecções de satélite por Smith et al. (2005) sobrepostas ao mapa de densidade de ocorrência de relâmpagos. A área negra constitui a região onde as detecções não foram possíveis pelo risco de danos ao satélite – correspondendo a região da AMAS. FONTE: SMITH et al. (2005)

O chuva de partículas gerado pelos raios cósmicos na atmosfera terrestre acontece devido a colisões entre esses raios energéticos e partículas de ar da atmosfera neutra. Como partículas geradas por essas colisões ainda possuem energia muito grande – embora, por força da conservação da energia, a energia se distribua pelas partículas do chuva sem aumentar seu valor total –, o número de partículas cresce ainda mais durante o caminho dos raios cósmicos até a Terra, promovendo o que se chama de *air extensive shower*, que consiste justamente no produto das colisões entre os raios cósmicos e a atmosfera neutra.

Pela incapacidade da atmosfera de barrar todas as partículas, a taxa de radiação na superfície da Terra gira em torno de 1 mSv por ano (BARTLETT, 2004), sendo Sv a unidade Sievert, que mede a quantidade de radiação ionizante recebida. Assim, a radiação cósmica é uma radiação ionizante produzida pelos raios cósmicos. Os níveis de radiação cósmica variam de acordo com características geográficas e sofrem alterações com a ocorrência de fenômenos espaciais.

Como vimos, a proteção contra a radiação cósmica diminui de acordo com o aumento da altitude, o que faz com que os aeronautas sejam um grupo especialmente vulnerável, sobretudo no Brasil, em que existe o fenômeno da AMAS, que provoca uma maior incidência de partículas energéticas. Como a radiação cósmica é uma radiação ionizante, essa exposição pode causar uma série de riscos à saúde e à integridade física desses profissionais.

2.3 Níveis de exposição dos aeronautas à radiação

Os aeronautas estão expostos a níveis maiores de radiação cósmica em comparativo com o público em geral na superfície da Terra, por estarem protegidos por uma camada menor da atmosfera. A dose de radiação recebida varia de acordo com a altura, duração e rota do voo; outras características físicas, como a atividade solar, também influenciam. Poucos estudos, entretanto, traçam um comparativo entre as doses de radiação recebidas pelos aeronautas e as doses recebidas em outras profissões.

Em seu trabalho pioneiro, Gundestrup e Storm (1999) estimaram que os aeronautas recebem uma dose anual média de 3-6 mSv por ano, sendo que a dose para 950 horas de voo pode variar no espectro de 0,2-9,1 mSv. Bennett et al. (2013, p. 103), em um estudo feito com pilotos no Canadá no ano de 2009, indicou que a categoria recebe uma dose média anual de 3 mSv.

Dados de entidades oficiais de diferentes países da Europa, sob supervisão da Organização Internacional do Trabalho, indicaram que os aeronautas estiveram expostos a doses médias anuais que variam de 1,09-2,55 mSv, podendo, no entanto, chegar a níveis superiores a 6 mSv/ano (NIU, 2011, p. 40).

Um dos estudos mais apurados sobre o tema é o relatório emitido em outubro de 2015 pelo Departamento de Radioproteção da Alemanha (Bundesamt für Strahlenschutz), sob a coordenação de Frasch et al., intitulado “A exposição ocupacional à radiação na Alemanha em 2013-2014” (Die berufliche Strahlenexposition in Deutschland 2013-2014), que apresenta e analisa os resultados da monitoração das doses de radiação recebidas pelas profissões ocupacionalmente expostas ao fenômeno naquele país. 358.000 trabalhadores foram monitorados por meio de dosímetros individuais e 45 companhias aéreas calcularam a dose recebida por 39.500 aeronautas por meio de programas computacionais certificados.

Os resultados apontaram uma dose média anual de 0,050 mSv para os trabalhadores em geral, monitorados individualmente, o que corresponde a menos de 3% do limite superior anual de 20 mSv estabelecido pela legislação internacional. Em contraste, a dose média individual relativa à classe dos aeronautas detectada nesse período foi de 1,89 mSv/ano (FRASCH et al., 2015). O relatório demonstra que a profissão de aeronauta foi considerada a profissão exposta aos maiores níveis de radiação, em doses superiores a profissões da área da medicina (como a profissão de radiologista) e da engenharia nuclear, o que é ilustrado com clareza pela Figura 3. A única ressalva a ser feita é a presença, naquele país, de um grupo específico de trabalhadores da mineração de urânio na empresa Wismut, os quais estão sujeitos a níveis superiores atípicos de radiação.

Outro relatório emitido pelo mesmo órgão da administração alemã, intitulado “A exposição ocupacional à radiação da tripulação de voo na Alemanha em 2004-2009” (Die berufliche Strahlenexposition des fliegenden Personals in Deutschland 2004–2009), também afirma que a profissão de aeronauta está entre as profissões com maior exposição ocupacional à radiação. Em 2009, a dose média de radiação recebida por um aeronauta naquele país foi de 2,9 mSv (FRASCH et al., 2011, p. 5).

Federico, em tese de doutorado defendida em 2011, estima que a dose média anual recebida por aeronautas que operam na região da América do Sul e Caribe varia entre 1,45 mSv e 1,67 mSv, podendo chegar a níveis de 2,31 mSv a 2,73 mSv (2011, p. 153). Em outro trabalho sobre o mesmo tema, o autor ressalta a urgência de se avaliar as doses recebidas pela tripulação de voo no Brasil, uma vez que as estimativas iniciais indicam que a aviação comercial pode facilmente exceder os limites de 1 mSv/ano (FEDERICO et al. 2010, 143).

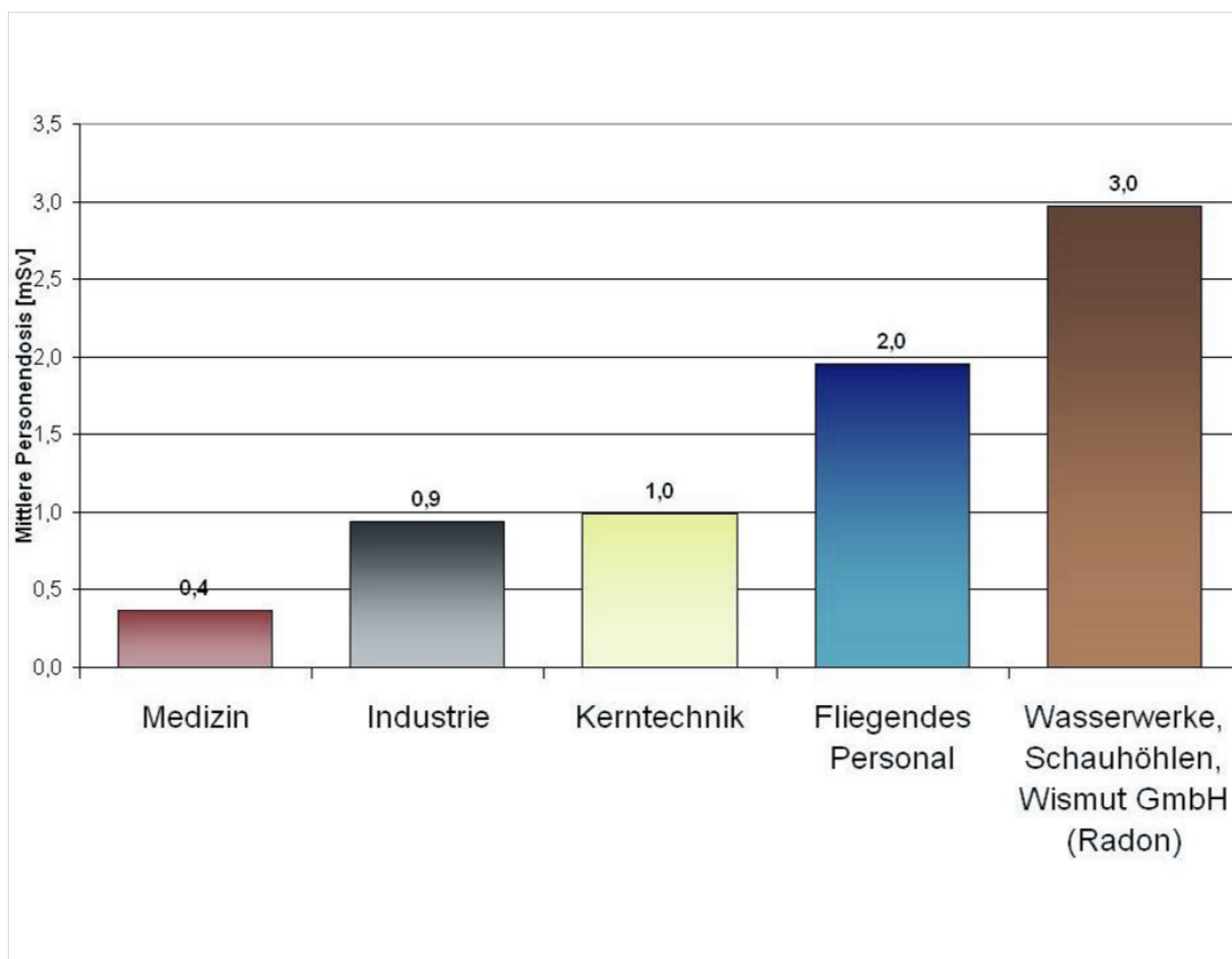


Figura 3: Dose média anual de radiação ionizante para diferentes categorias, em mSv/ano. Tradução livre: medicina, indústria, engenharia nuclear; aeronautas, manipulação de radônio na empresa Wismut Ltda. Disponível em: <http://www.bfs.de/DE/themen/ion/strahlenschutz/beruf/methodik/fliegendespersonal.html>. Acessado em 20 de dezembro de 2016.

Todos esses trabalhos indicam que, em um ambiente em que não há medidas de controle das doses de radiação recebida, a categoria dos aeronautas está ocupacionalmente exposta à radiação cósmica (e, portanto, radiação ionizante), em níveis superiores tanto ao limite do público em geral quanto aos níveis de exposição de quase todas as profissões com exposição à radiação ionizante.

A questão que se levanta nesse momento é a seguinte: considerando a evidente exposição ocupacional à radiação, quais são os possíveis riscos à saúde que essa exposição pode representar e qual é a regulamentação internacional do fenômeno?

2.4 Regulamentação do fenômeno ao redor do mundo

Ao redor do mundo, a exposição ocupacional a radiações ionizantes desperta uma grande atenção de organismos internacionais e, nas últimas décadas, a questão da exposição dos aeronautas à radiação cósmica tem sido levantada com alguma frequência em âmbito internacional.

A Comissão Internacional de Proteção Radiológica (International Commission on Radiological Protection - ICRP), organização internacional sem fins lucrativos cuja atuação na radioproteção está entre as mais importantes do mundo¹, aprovou em março de 2016 uma publicação exclusivamente sobre a proteção radiológica da radiação cósmica na aviação (ICRP Publication 132 - Radiological Protection from Cosmic Radiation in Aviation).

A publicação da ICRP evidencia que a exposição a radiações cósmicas na aviação não pode ser ignorada, afirmando que os aeronautas não somente são expostos ocupacionalmente à radiação, mas também exercem uma das profissões com maiores níveis de exposição à radiação (LOCHARD et al., p. 43). Entre as conclusões do estudo, destaca-se a urgência em divulgar os riscos da radiação cósmica para a sociedade civil e, em especial, para os passageiros frequentes, inclusive com recomendações aos passageiros frequentes de que passem a monitorar a dose de radiação recebida.

No caso dos aeronautas, a Comissão recomenda que se mantenha um nível de referência de exposição entre 0,5 e 1 mSv/ano. Como existem muitos limites práticos à adequada otimização da proteção radiológica na aviação, a ICRP defende que a monitoração e controle da dose individual, para que esta se mantenha abaixo desse nível de referência, mostram-se como a opção mais efetiva para a proteção da saúde dos aeronautas (LOCHARD et al., p. 43).

Na União Europeia, o art. 42^o da Diretiva 96/29/EURATOM, emitida pela Comunidade Europeia da Energia Atômica e adotada por todos os países-membros da União Europeia, estabelece que as companhias aéreas devem monitorar a exposição dos aeronautas, informando os riscos que a radiação cósmica

¹Tamanha é a importância da ICRP na radioproteção mundial que a Agência Internacional de Energia Atômica (IAEA), composta atualmente por 168 países (inclusive o Brasil), adota as recomendações emitidas pela ICRP como normas e diretrizes, que então são adotadas pelos países membros na legislação doméstica.

representa para a saúde, reduzindo as doses recebidas por tripulações muito expostas, e aplicando um regime de proteção especial durante a gravidez e amamentação.

No Canadá, todo aeronauta que receber uma dose anual superior a 1 mSv/ano deve ser considerado ocupacionalmente exposto à radiação cósmica. A regulamentação do fenômeno, como pode ser verificado no Commercial and Business Aviation Advisory Circular No. 0138R de 2006, também prescreve no sentido de monitorar e registrar as doses recebidas pelos aeronautas, informar os riscos potenciais da exposição, e proteger especialmente a gestante.

2.5 Saúde do aeronauta

A problemática da exposição de aeronautas à radiação cósmica também despertou o interesse e a preocupação de pesquisadores na área da medicina. Embora ainda se discuta, do ponto de vista científico, a correlação entre câncer e radiação cósmica, já foram publicados numerosos estudos correlacionando problemas de saúde da categoria dos aeronautas com a exposição ocupacional à radiação.

Um estudo realizado na Dinamarca com 3877 aeronautas (dos quais 3790 eram do sexo masculino) demonstrou um elevado risco de leucemia mieloide aguda e câncer em pilotos de jato do sexo masculino com mais de 5.000 horas de voo e, de maneira geral, um risco elevado de câncer de pele em aeronautas dinamarqueses do sexo masculino. O estudo indicou a exposição à radiação cósmica como a principal causa para o alto índice de câncer, provavelmente por conta da alta carga energética do fenômeno (GUNDESTROP e STORM, 1999, p. 3).

No mesmo sentido, uma pesquisa islandesa investigou a correlação entre a exposição dos aeronautas a raios cósmicos e risco de desenvolvimento de melanoma e câncer de mama, em um espaço amostral de 1690 aeronautas, dos quais 158 eram do sexo masculino e 1532 do sexo feminino. O estudo constatou riscos mais elevados de câncer em geral e, especialmente, de câncer de mama, por conta da exposição a radiações cósmicas (RAFNSSON et al., 2001, p. 6). Por exemplo, relatou-se na pesquisa 7 casos de melanoma maligno, enquanto a quantidade esperada (i.e., do público geral) seria de 2,34 (RAFNSSON et al., 2001, p. 3).

Outro amplo estudo, empreendido na Suécia com 3202 aeronautas (2956 do sexo feminino e 632 do sexo masculino), indicou um risco de câncer mais elevado do que no público em geral, sendo que a exposição à radiação cósmica foi considerada a causa mais provável (LINNERSJÖ et al., 2003, p. 813-814). Resultados semelhantes foram encontrados em outros estudos, como Rafnsson e Tulinius (2000) e Hammer et al. (2012).

Mesmo que seja necessária uma maior produção de estudos para que se possa comprovar, do ponto de vista científico, a conexão entre exposição à radiação cósmica e a ocorrência de câncer – como defende o estudo recente de Di Trollo et al. (2015, p. 1132) –, é certo que se deve manter a dose de radiação

recebida pelos aeronautas no nível mais baixo possível, ainda que por precaução, em consonância com as recomendações mais recentes da Comissão Internacional de Proteção Radiológica e com a tendência do ambiente regulatório mundial exposta no tópico anterior.

3 Regulamentação jurídica da proteção à radiação ionizante no Brasil

3.1 Âmbito regulatório: normas da Comissão Nacional de Energia Nuclear

A Comissão Nacional de Energia Nuclear – CNEN, autarquia federal vinculada ao Ministério da Ciência e Tecnologia, é o órgão responsável no Brasil pela emissão de normas jurídicas que regulamentam os mecanismos de proteção e o uso da radiação ionizante. No atual estado da arte regulatório, há uma série de normas editadas pela CNEN (NN 3.01 – Diretrizes Básicas de Proteção Radiológica) que estabelecem, para todos os efeitos legais, os requisitos básicos de proteção radiológica em relação à exposição à radiação ionizante.

A Norma 3.01 da CNEN é aplicável aos casos em que há exposição ocupacional do indivíduo (art. 1.2.3) à radiação ionizante, ou seja, em situações de exposição normal ou potencial decorrentes de seu trabalho a qualquer espécie de fonte radioativa, inclusive a natural. A radiação cósmica da superfície do local é desconsiderada para fins regulatórios (art. 1.2.2 c/c art. 3.36). A norma prescreve que qualquer ação envolvendo práticas ou fontes associadas a essas práticas só pode ser realizada em conformidade com determinados requisitos de segurança, a não ser que a exposição seja excluída do controle regulatório da CNEN ou que a fonte esteja isenta ou dispensada de controle (art. 5.1).

Os conceitos de “fonte” e “prática”, em sua acepção técnica, são definidos conforme o art. 3 da Norma 3.01 da CNEN. Fonte é todo “equipamento ou material que emite ou é capaz de emitir radiação ionizante ou liberar substâncias ou materiais radioativos” (art. 3.40). Caso emitam radiação naturalmente, são consideradas fontes naturais – por exemplo, a radiação cósmica e a radiação produzida por minerais como o urânio (art. 3.41).

Prática, segundo a definição da Norma, é “toda atividade humana que introduz fontes de exposição ou vias de exposição adicionais ou estende a exposição a mais pessoas, ou modifica o conjunto de vias de exposição devida a fontes existentes, de forma a aumentar a probabilidade de exposição de pessoas ou o número de pessoas expostas” (art. 3.59). As práticas que envolvam exposição a fontes naturais de radiação são englobadas pela Norma, mas apenas nas hipóteses em que o controle da exposição seja considerado necessário pela CNEN (art. 1.2.2, b). A Posição Regulatória 3.01/001:2011 trata dos critérios de exclusão, isenção e dispensa da aplicação de requisitos de proteção radiológica, ou seja, das hipóteses em que a CNEN não considera necessário intervir para controlar a exposição.

A Posição Regulatória 3.01/001:2011 considera como excluídas do escopo da Norma 3.01 as exposições cuja intensidade ou probabilidade de ocorrência não possa ser excluída por ações de proteção radiológica, além dos casos que a CNEN vier a considerar como excluídos de seu controle (art. 3.1 da Posição Regulatória). A isenção, por sua vez, é aplicável a práticas que, por conta dos baixos níveis de radiação envolvidos, se enquadrem nos critérios de isenção estabelecidos pela Posição Regulatória (art. 3.2 da Posição Regulatória). Os princípios gerais de isenção são: a) o risco individual associado à radiação é irrelevante; b) o impacto coletivo das práticas é suficientemente baixo, de forma a não necessitar o cumprimento de requisitos de proteção radiológica; c) as práticas e fonte isentas devem ser intrinsecamente seguras, com probabilidade irrelevante de cenários não conformes com os princípios "a" e "b" (arts. 3.2.1 e 3.2.3, a, b e c, da Posição Regulatória).

Todas as práticas que estejam dentro do escopo da Norma 3.01 da CNEN devem obedecer com precisão às determinações da Norma. Justamente por conta do risco inerente às práticas que envolvam fontes de radiação, a Norma estabelece uma série de requisitos para que essas práticas ocorram. Entre esses requisitos, destaca-se a necessidade de elaboração de um Plano de Proteção Radiológica que descreva as fontes de radiação, demonstre a otimização da proteção radiológica ou sua dispensa, forneça dados acerca da jornada de trabalho dos IOE (Indivíduos Ocupacionalmente Expostos), bem como a estimativa das doses anuais para os IOE e para indivíduos do público, além de controle médico dos IOE, entre outros (art. 5.3.8, e, f, g, h e l). Percebe-se, portanto, que a legislação determina uma expressiva precaução para o desenvolvimento de qualquer atividade laboral com exposição à radiação ionizante.

Nesse sentido, a Norma 3.01 estabelece que "nenhuma prática será aceita pela CNEN, a não ser que a prática produza benefícios, para os indivíduos expostos ou para a sociedade, suficientes para compensar o detrimento correspondente [...]" (art. 5.4.1.1). Como não existe nível de exposição à radiação que seja absolutamente seguro, a legislação, seguindo uma tendência mundial, impõe que esse nível seja otimizado, de forma que a exposição em termos de dosagem, número de pessoas expostas e probabilidade de ocorrência de exposições seja a menor possível, tendo em conta os fatores econômicos e sociais (art. 5.4.3.1).

Como medida de controle, a Norma 3.01 estabelece, em seu art. 5.4.2, os níveis máximos de dose individual permitidos por lei. As doses anuais recebidas pelos indivíduos não podem, a não ser em circunstâncias especiais autorizadas pela CNEN, e ressalvadas as exposições médicas, ultrapassar os limites da Tabela 1.

Dessa forma, a exposição ocupacional à radiação ionizante não pode ultrapassar os limites de 20 mSv/ano em 5 anos consecutivos ou exceder o limite de 50 mSv em qualquer ano. Além disso, mulheres grávidas não podem receber mais do que 1 mSv durante o período de gestação, e que indivíduos com menos de 18 anos de idade não podem estar sujeitos a exposições ocupacionais (arts. 5.4.2.1, 5.4.2.2 e 5.4.2.3).

A legislação atualmente em vigor, como esperado, não aborda com clareza a questão da exposição ocupacional à radiação cósmica na atmosfera em altitudes de voo comercial. O art. 3.2.1 da Posição

Tabela 1: *Limites de doses anuais.*

| Grandeza | Órgão | Indivíduo ocupacionalmente exposto | Indivíduo do público |
|------------------|---------------|------------------------------------|----------------------|
| Dose efetiva | Corpo inteiro | 20 mSv | 1 mSv |
| Dose equivalente | Cristalino | 20 mSv | 15 mSv |
| | Pele | 500 mSv | 50 mSv |
| | Mãos e pés | 500 mSv | - |

Regulatória 3.01/001:2011 exclui da aplicação das normas a radiação cósmica na superfície da terra. No mesmo sentido, a Posição Regulatória considera como isenta a prática ou fontes associadas a práticas em que a dose efetiva esperada a ser recebida por qualquer indivíduo do público por conta dessa prática ou fonte seja inferior a 1 mSv em qualquer período de um ano (art. 3.2.4, a).

Este não é o caso da radiação cósmica recebida pelos aeronautas, cujos níveis de exposição facilmente superam o limite de 1 mSv/ano para um IOE, estando acima da isenção legal. Além disso, a omissão por parte das normas emitidas pela CNEN acerca da radiação cósmica na atmosfera não deve ser interpretada em desfavor do trabalhador exposto à radiação, tendo em vista os riscos advindos da exposição a qualquer fonte radioativa.

Assim, embora a radiação cósmica seja considerada uma fonte natural, a exposição ocupacional à radiação cósmica na altitude de voo comercial, tal como a que ocorre no caso dos aeronautas, é uma prática que introduz vias de exposição adicionais, em níveis bastante superiores à radiação na superfície da terra, conforme tratamos na seção anterior. Isto enseja o mesmo tratamento jurídico dispensado a outras profissões em que ocorre exposição à radiação ionizante, como o caso dos radiologistas, justamente porque a exposição dos aeronautas é equiparável (e, via de regra, maior) do que a dessas profissões.

3.2 Normas de Direito Previdenciário

No âmbito do Direito Previdenciário, a exposição à radiação ionizante dá ensejo a uma espécie diferenciada de aposentadoria – a aposentadoria especial – ou a uma contagem diferenciada do tempo de contribuição. Também é necessário mencionar que, quando a exposição é causadora de acidente de trabalho ou doença ocupacional, é possível que sejam devidos outros benefícios previdenciários de caráter acidentário, mas estes não serão abordados no presente artigo por exigirem uma análise mais detalhada.

A aposentadoria especial é uma espécie de aposentadoria destinada aos trabalhadores que exercem suas atividades expostos a condições prejudiciais à saúde ou à integridade física e tem como principal característica a redução de tempo de serviço necessário à aposentadoria. A depender do agente nocivo, a aposentadoria especial será concedida após 15, 20 ou 25 anos de serviço, conforme dispõe o art. 57 da Lei nº 8.213/91, e a relação desses agentes nocivos se encontra no Anexo IV do Decreto nº 3.048/99.

Além de reduzir o tempo necessário para passar à inatividade, o valor do benefício de aposentadoria especial equivale à integralidade do salário-de-benefício, conforme o art. 57, §1º, da Lei nº 8.213/91. Não incide, portanto, nenhuma fórmula de redução do valor do benefício futuro, como o fator previdenciário, e por isso a aposentadoria especial, se comparada com outras espécies de aposentadoria, tende a ser mais benéfica do ponto de vista financeiro ao trabalhador. Essa aparente “posição vantajosa” para as aposentadorias especiais nada mais é do que uma contrapartida aos danos à saúde e à integridade física causados por essas profissões, garantia prevista no art. 201, §1º, da Constituição Federal.

Para que a aposentadoria especial seja concedida, é necessária a comprovação da exposição aos agentes nocivos, segundo o art. 57, §3º da Lei no 8.213/91. Esta comprovação de atividade especial, no entanto, não é uma questão simples, em virtude das incontáveis alterações legislativas acerca da matéria. De maneira resumida, para comprovar a atividade especial exercida em período anterior a 05/03/1997, exige-se apenas o enquadramento da atividade nas relações dos anexos dos Decretos nº 53.831/64 e nº 83.080/79. Como tanto a radiação ionizante quanto a profissão de aeronauta estavam presentes nas relações desses Decretos, pode-se considerar qualquer atividade exercida por aeronautas em período anterior a 05/03/1997 como atividade especial.

A partir de 05/03/1997, no entanto, exige-se comprovação da efetiva exposição aos agentes nocivos, o que pode ser feito por meio de diversos laudos ou formulários, a depender da época. Atualmente, o formulário responsável por essa comprovação é o Perfil Profissiográfico Previdenciário, que contém informações detalhadas acerca do ambiente de trabalho, o agente ao qual o trabalhador está exposto, os níveis de exposição, entre outros.

A radiação ionizante está presente no rol de agentes nocivos que dão ensejo à aposentadoria especial do Anexo IV do Decreto nº 3.048/99, sendo classificada como “agente físico”, sob o código 2.0.3. Segundo o que dispõe a norma, a exposição à radiação ionizante dá ensejo a uma aposentadoria após 25 anos de contribuição, nas seguintes atividades: a) extração e beneficiamento de minerais radioativos; b) atividades em minerações com exposição ao radônio; c) realização de manutenção e supervisão em unidades de extração, tratamento e beneficiamento de minerais radioativos com exposição às radiações ionizantes; d) operações com reatores nucleares ou com fontes radioativas; e) trabalhos realizados com exposição aos raios Alfa, Beta, Gama e X, aos nêutrons e às substâncias radioativas para fins industriais, terapêuticos e diagnósticos; f) fabricação e manipulação de produtos radioativos; g) pesquisas e estudos com radiações ionizantes em laboratórios.

Para a legislação regulatória, estudada no tópico anterior, a radiação ionizante de origem cósmica é uma fonte radioativa. Assim, a exposição à radiação cósmica pode ser considerada, para efeitos de enquadramento nas atividades do Anexo IV do Decreto nº 3.048/99, sob a alínea “d” do código 2.0.3, ou seja, “operações com reatores nucleares ou com fontes radioativas”.

O código 2.0.0 do Anexo IV do Decreto nº 3.048/99 estabelece que os agentes físicos dão ensejo à aposentadoria especial quando ocorrer exposição acima dos limites de tolerância especificados ou, quando

houver atividades descritas, no mero exercício dessa atividade. Como vimos, no caso das radiações ionizantes, o Anexo IV descreve uma série de atividades, não mencionando limites de tolerância. Para o Decreto nº 3.048/99, portanto, o exercício de qualquer uma das atividades acima mencionadas durante 25 anos, de maneira não intermitente nem ocasional, é suficiente para garantir uma aposentadoria especial. No entanto, a Instrução Normativa nº 77 de 2015, do Instituto Nacional do Seguro Social, norma de caráter infralegal cujo objetivo seria regulamentar no âmbito administrativo as disposições da Lei nº 8.213/91 e do Decreto nº 3.048/99, estabelece em seu art. 282, II, que a exposição ocupacional às radiações ionizantes, após 06/03/1997, só caracteriza período especial quando forem ultrapassados os limites de tolerância estabelecidos no Anexo 5 da NR-15 do MTE.

Temos aqui uma situação de reprovável inépcia legislativa, pois o Anexo 5 da NR-15 do MTE, ao definir “limites de tolerância”, remete aos níveis estabelecidos pela Norma 3.01 da CNEN. Conforme exposto na seção anterior, a atual redação Norma 3.01 não trata de limites de tolerância, mas de doses máximas, acima das quais não pode haver qualquer atividade.

Assim, o art. 282, II, da IN nº 77 do INSS vai de encontro aos princípios mais básicos de proteção ao trabalhador, exigindo que ele desenvolva seu trabalho sob risco extremo à saúde, além de ser insustentável do ponto de vista jurídico, já que a Norma 3.01 da CNEN não permite que haja atividade laboral acima dos limites de tolerância estabelecidos pela lei. Impõe-se, portanto, que a aplicação desse dispositivo seja afastada, por contrariar os próprios requisitos contidos na legislação.

Pela atual legislação previdenciária, somente existe direito à aposentadoria especial quando comprovados 25 anos de exposição contínua a agentes nocivos. Contudo, o trabalhador que não possui tempo especial suficiente para requerer uma aposentadoria especial pode aproveitar o tempo especial para uma outra aposentadoria, se beneficiando de uma contagem diferenciada. A fórmula é simples: multiplica-se o tempo especial por 1,2 para mulheres e 1,4 para homens, conforme o art. 70 do Decreto no 3.048/99. Assim, a título de exemplo, um homem que trabalhou durante 10 anos exposto à radiação ionizante não poderá requerer uma aposentadoria especial, mas poderá converter esse tempo especial para comum, utilizando o tempo resultante da conversão (14 anos) em uma aposentadoria por tempo de contribuição.

3.3 Normas de Direito do Trabalho

A Constituição Federal estabelece como direitos básicos do trabalhador a redução dos riscos inerentes ao trabalho por meio de normas de saúde, higiene e segurança (art. 7º, XII) e o recebimento de adicional de remuneração para as atividades penosas, insalubres ou perigosas (art. 7º, XIII), além de proibir o trabalho insalubre para menores de 18 anos (art. 7º, XXXIII). A regulamentação dos adicionais de insalubridade e periculosidade é feita pela Consolidação das Leis do Trabalho (CLT), Decreto-Lei nº 5.452/43.

O art. 189 da CLT define as atividades insalubres como aquelas que "por sua natureza, condições ou métodos de trabalho, exponham os empregados a agentes nocivos à saúde, acima dos limites de

tolerância fixados em razão da natureza e da intensidade do agente e do tempo de exposição aos seus efeitos". A definição dos agentes nocivos, sua natureza, e o estabelecimento dos limites de tolerância são de competência do Ministério do Trabalho e Emprego, por meio de atos administrativos.

A já mencionada Norma Regulamentadora no 15 (NR-15), aprovada pela Portaria MTB nº 3.214/78, identifica as atividades e operações com exposição a radiações ionizantes como atividades insalubres, quando excedidos os limites de tolerância previstos na Norma 3.01 da CNEN. Como exposto, a Norma 3.01 da CNEN (seja a atual, seja a vigente à época) não trata exatamente de limites de tolerância, mas de doses máximas, de forma que, pela literalidade da lei, nenhum trabalho com exposição a radiações ionizantes poderá ser considerado insalubre, já que é expressamente proibida qualquer exposição ocupacional acima das doses máximas previstas pela Norma 3.01 da CNEN.

As atividades perigosas, por sua vez, são definidas pelo art. 193 da CLT como "aquelas que, por sua natureza ou métodos de trabalho, impliquem o contato permanente com inflamáveis ou explosivos em condições de risco acentuado". A Norma Regulamentadora no 16 (NR-16), com as alterações inseridas pela Portaria no 518/03 do MTE, considera perigosas as atividades com exposição a radiações ionizantes constantes no seu Anexo, como radioterapia e atividades de operação e manutenção de reatores nucleares, mas não inclui em seu rol a exposição à radiação cósmica.

A Subseção I Especializada em Dissídios Individuais – SBDI I do Tribunal Superior do Trabalho, ao apreciar a questão, emitiu a OJ (Orientação Jurisprudencial) no 345, assentando o entendimento de que é devido adicional de periculosidade ao empregado exposto a radiações ionizantes, exceto no período de 12/12/2002 a 06/04/2003, período no qual é devido adicional de insalubridade. Ressaltamos que, em um dos julgados que deram origem à orientação jurisprudencial (ER 522574/1998, de relatoria do Ministro Carlos de Paula), o Tribunal deixou claro que outras atividades não constantes no Anexo I da NR-16 podem dar ensejo ao pagamento de adicional de periculosidade.

Assim, nos termos da legislação atualmente em vigor, pode-se afirmar que os aeronautas, à semelhança de outras profissões sujeitas à exposição a radiações ionizantes, têm direito ao recebimento de adicional de periculosidade, por aplicação analógica do art. 193 da CLT e da NR-16.

4 Conclusões

A exposição dos aeronautas à radiação cósmica – e, por consequência, à radiação ionizante – é uma situação que vem sendo estudada há tempos no universo científico. Os aeronautas recebem uma dose de radiação ionizante que é frequentemente superior à dose recebida por outras profissões ocupacionalmente expostas ao mesmo fenômeno, o que deveria ensejar o mesmo tratamento jurídico. No entanto, a categoria permanece desamparada pelas normas jurídicas que regulamentam o fenômeno no país.

No âmbito regulatório, não permanece claro qual é o enquadramento da exposição à radiação cósmica pela Norma 3.01 da Comissão Nacional de Energia Nuclear. Argumentamos, a partir de uma interpretação sistemática das normas em vigor, que os aeronautas devem ser considerados indivíduos ocupacionalmente expostos (IOE) para os efeitos da Norma 3.01, na medida em que estão expostos, via de regra, a doses superiores à dose legalmente isenta de 1 mSv/ano.

No contexto do Direito Previdenciário, demonstrou-se que a profissão de aeronauta deve ser considerada uma atividade especial, o que enseja a concessão de aposentadoria especial, a conversão de tempo especial em comum e outros benefícios previdenciários de caráter acidentário. Entretanto, a concessão administrativa desses benefícios pode encontrar óbice no art. 282, II, da Instrução Normativa no 77/15 do INSS, que estabelece que a exposição à radiação ionizante só caracteriza tempo especial quando superado o limite do Anexo 5 da NR-15 do MTE, que remete à Norma 3.01 da CNEN e aos níveis de 20 mSv/ano. Impõe-se que a aplicação dessa norma seja afastada, na via administrativa ou judicial, por estar em patente contradição com a legislação e com a própria Norma 3.01 da CNEN.

Finalmente, viu-se que no Direito do Trabalho a exposição à radiação ionizante enseja o pagamento de adicional de periculosidade, segundo o art. 193 da CLT em combinação com a NR-16 e a jurisprudência do TST. As atividades desenvolvidas pelos aeronautas, no entanto, não constam do rol de atividades do Anexo da NR-16, sendo necessário aplicar as disposições legais de maneira analógica.

Dessa forma, enquanto para a legislação regulatória permanece ambíguo o tratamento da profissão de aeronauta como ocupacionalmente exposta, as legislações previdenciária e trabalhista impõem uma série de obstáculos administrativos para a garantia dos direitos decorrentes da exposição à radiação ionizante. É provável, portanto, que esses trabalhadores precisarão recorrer ao Poder Judiciário caso desejem assegurar seus direitos.

A reprovável regulamentação jurídica do fenômeno, contudo, decorre de um problema ainda mais grave: o desconhecimento geral que se tem no Brasil acerca dos riscos da exposição à radiação cósmica. A primeira medida que propomos para uma regulamentação mais adequada do fenômeno é a divulgação, por parte do poder público e das empresas aéreas, dos riscos que a radiação cósmica comporta à saúde e à integridade física dos aeronautas e passageiros frequentes, conforme a recomendação mais recente da Comissão Internacional de Proteção Radiológica.

O monitoramento individual das doses de radiação recebida pelos aeronautas é a segunda medida que entendemos ser necessária. Isso pode ser realizado tanto pela utilização de dosímetros individuais quanto pelo cálculo da dose recebida a partir de simulações por meio de programas computacionais, à semelhança do que é feito na Alemanha. Essa medida é um passo essencial para definir o quadro fático da exposição à radiação cósmica no Brasil – como já expusemos, uma série de particularidades faz com que seja provável que os níveis de radiação recebidas aqui sejam superiores aos níveis recebidos ao redor do mundo.

A terceira medida – que depende, sobretudo, de pressão política da categoria – seria a criação de uma

legislação mais clara e coerente, que evitasse o desnecessário recurso ao Poder Judiciário para que sejam assegurados os direitos e garantias decorrentes da exposição ocupacional à radiação.

A quarta e última medida que propomos é uma melhor administração das horas de trabalho da categoria, de forma a reduzir as doses de radiação para o menor nível possível, aproximando a dose recebida pelos aeronautas àquela dose recebida pelo público em geral (1 mSv/ano), conforme as recomendações da Comissão Internacional de Proteção Radiológica e a tendência observada em vários países no mundo.

Dessa maneira, embora o fenômeno ainda seja pouco debatido no âmbito jurídico no Brasil, esperamos que este trabalho sirva como um primeiro passo para a conscientização dos riscos decorrentes da radiação cósmica para os aeronautas e uma futura regulamentação jurídica mais adequada do fenômeno.

Referências

- [1] BARTLETT, D. T. Radiation protection aspects of the cosmic radiation exposure of aircraft crew. *Radiation protection dosimetry*, v. 109, n. 4, p. 349-355, 2004. DOI: 10.1093 /rpd/inch 311.
- [2] BRASIL. Decreto-Lei nº 5.452, de 1º de maio de 1943 – Consolidação das Leis do Trabalho. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Decreto-Lei/Del5452.htm. Acessado em 30 de dezembro de 2016.
- [3] BRASIL. MINISTÉRIO DO TRABALHO. Norma Regulamentadora nº 15. Aprovada pela Portaria MTB n.º 3.214, de 08 de junho de 1978. Disponível em: <http://trabalho.gov.br/images/Documentos/SST/NR/NR15/NR15-ANEXO15.pdf>. Acessado em 30 de dezembro de 2016.
- [4] BRASIL. Constituição da República Federativa do Brasil de 1988. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicaocompilado.htm. Acessado em 30 de dezembro de 2016.
- [5] BRASIL. Lei nº 8.213, de 24 de julho de 1991. Disponível em http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L8213cons.htm. Acessado em 30 de dezembro de 2016.
- [6] BRASIL. Decreto nº 3.048, de 6 de maio de 1999. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/decreto/d3048.htm. Acessado em 30 de dezembro de 2016.
- [7] BRASIL. INSTITUTO NACIONAL DO SEGURO SOCIAL. Instrução normativa nº 77, de 21 de janeiro de 2015. Disponível em: <http://sislex.previdencia.gov.br/paginas/38/inss-pres/2015/77.htm>. Acessado em 30 de dezembro de 2016.
- [8] BRASIL. COMISSÃO NACIONAL DE ENERGIA NUCLEAR. Norma CNEN NN 3.01 – Diretrizes básicas de proteção radiológica. Resolução CNEN nº 27/04, publicada no DOU de 06 de janeiro de 2005. Disponível em: <http://appasp.cnen.gov.br/seguranca/normas/pdf/Nrm301.pdf>. Acessado em 30 de dezembro de 2016.
- [9] BRASIL. COMISSÃO NACIONAL DE ENERGIA NUCLEAR. Posição regulatória 3.01/001:2011 – Critérios de exclusão, isenção e dispensa de requisitos de proteção radiológica. Aprovada pela resolução CNEN nº 102, de 22 de dezembro de 2010, publicada no DOU de 10 de maio de 2011. Disponível em: http://appasp.cnen.gov.br/seguranca/normas/pdf/pr301_01.pdf. Acessado em 30 de dezembro de 2016.
- [10] BRASIL. COMISSÃO NACIONAL DE ENERGIA NUCLEAR. Posição regulatória 3.01/004:2011 – Restrição de dose, níveis de referência ocupacionais e classificação de áreas. Aprovada pela resolução CNEN nº 102, de 22 de dezembro de 2010, publicada no DOU de 10 de maio de 2011.

Disponível em: http://appasp.cnen.gov.br/seguranca/normas/pdf/pr301_04.pdf. Acessado em 30 de dezembro de 2016.

- [11] BENNETT, L. G. I. et al. A survey of the cosmic radiation exposure of Air Canada pilots during maximum galactic radiation conditions in 2009. *Radiation Measurements*, v. 49, p. 103-108, 2013.
- [12] CHAMBERLAIN, J.W. *Theory of Planetary Atmospheres: An introduction to their physics and chemistry*. Academic Press, New York, 1978.
- [13] DI TROLIO, Rossella et al. The use of interferon in melanoma patients: A systematic review. *Cytokine & growth factor reviews*, v. 26, n. 2, p. 203-212, 2015.
- [14] DORMAN, Lev. *Cosmic Rays in Magnetospheres of the Earth and other Planets*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [15] FEDERICO, C. A. et al. Estimates of cosmic radiation dose received by aircrew of DCTA's flight test special group. *Journal of Aerospace Technology and Management*, v. 2, n. 2, p. 137-144, 2010.
- [16] FEDERICO, C. A. *Dosimetria da radiação cósmica no interior de aeronaves no espaço aéreo brasileiro*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, 2011.
- [17] FEDERICO, C. A. et al. *Considerações a Respeito de Proteção Radiológica de Tripulações de Aeronaves no Brasil*. 2014. Disponível em: <http://hdl.handle.net/123456789/14255>. Acessado em 29 de dezembro de 2016.
- [18] FRASCH, G. et al. *Die berufliche Strahlenexposition des fliegenden Personals in Deutschland 2004-2009: Bericht des Strahlenschutzregisters*. Alemanha, Bundesamt für Strahlenschutz, 2011.
- [19] FRASCH, G. et al. *Die berufliche Strahlenexposition in Deutschland 2013-2014: Bericht des Strahlenschutzregisters*. Alemanha, Bundesamt für Strahlenschutz, 2015.
- [20] GAISSER, Thomas K. *Cosmic Rays and Particle Physics*. Cambridge University Press, 1990.
- [21] GUNDESTRUP, Maryanne; STORM, Hans H. Radiation-induced acute myeloid leukaemia and other cancers in commercial jet cockpit crew: a population-based cohort study. *The Lancet*, v. 354, n. 9195, p. 2029-2031, 1999.
- [22] HAMMER, Gaël P.; BLETTNER, Maria; ZEEB, Hajo. Epidemiological studies of cancer in aircrew. *Radiation protection dosimetry*, p. 1-8, 2009. DOI: 10.1093/rpd/ncpl25.
- [23] HAMMER, Gaël Paul et al. Cosmic radiation and mortality from cancer among male German airline pilots: extended cohort follow-up. *European Journal of Epidemiology*, v. 27, n. 6, p. 419-429, 2012.
- [24] KÖHN, Christoph; EBERT, Ute. Calculation of beams of positrons, neutrons, and protons associated with terrestrial gamma ray flashes. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, v. 120, n. 4, p. 1620-1635, 2015. DOI: 10.1002/2014JD022229.

- [25] KOTERA, Kumiko; OLINTO, Angela V. The astrophysics of ultrahigh energy cosmic rays. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, Vol. 49:119-53. DOI: 10.1146/annurevastro-081710-102620. 2011.
- [26] LINNERSJÖ, A. et al. Cancer incidence in airline cabin crew: experience from Sweden. *Occupational and environmental medicine*, v. 60, n. 11, p. 810-814, 2003.
- [27] PARIDOU, A. et al. Mortality among pilots and cabin crew in Greece, 1960–1997. *International journal of epidemiology*, v. 32, n. 2, p. 244-247, 2003.
- [28] LOCHARD, J. et al. ICRP Publication 132: Radiological Protection from Cosmic Radiation in Aviation. *Annals of the ICRP*, v. 45, n. 1, p. 5-48, 2016.
- [29] NIU, Shengli. Radiation protection of workers. International Labour Organization, 2011.
- [30] PEREIRA, Marlon Antonio et al. Avaliação da contribuição dos diferentes componentes da radiação cósmica atmosférica na dose em tripulações de aeronaves. *Brazilian Journal of Radiation Sciences*, v. 3, n. 1A, 2015.
- [31] RAFNSSON, Vilhjálmur; HRAFNKELSSON, Jón; TULINIUS, Hrafn. Incidence of cancer among commercial airline pilots. *Occupational and environmental medicine*, v. 57, n. 3, p. 175-179, 2000.
- [32] RAFNSSON, Vilhjálmur et al. Risk of breast cancer in female flight attendants: a population-based study (Iceland). *Cancer Causes & Control*, v. 12, n. 2, p. 95-101, 2001.
- [33] SMITH, David M. et al. Terrestrial gamma-ray flashes observed up to 20 MeV. *Science*, v. 307, n. 5712, p. 1085-1088, 2005. DOI: 10.1126/science.1107466.

The one-dimensional Fuzzy Ising Model

R. B. de Souza *

Department of Technological and Exact Sciences, State University of Southwest of Bahia

45029-750, Vitória da Conquista – Bahia, Brazil

Abstract

This work uses Fuzzy Sets Theory to develop analytical tools in order to guide the construction of the fuzzy phase diagram associated to the one-dimensional spin- $\frac{1}{2}$ Ising model subject to an external magnetic field, taking into account uncertainties presents in both exchange parameter J and magnetic field h . After that, by utilizing the fuzzy phase diagram just constructed, the consequences arising from those uncertain parameters on graphs of a few thermodynamics quantities such as magnetization and entropy are analyzed.

Keywords and phrases: Fuzzy sets, Ising Model, Fuzzy Phase Diagram, Thermodynamics.

1 Introduction

Ising-like chains [1] are amongst the most important models of the Statistical Physics as well as Condensed Matter Physics. Such an importance lies not only in the fact of its wide application to several phenomena, but also as a suitable toy model for testing more general chains. The Ising model is also applied in economy, social sciences, biology, biomembranes among other areas [2, 3, 4]. Therefore a generalization from this model can be very important for different knowledge areas.

In turn, Fuzzy Sets Theory has provided methods and algorithms where uncertain, vague or ambiguous description or reasoning are required, as occur in the fields of artificial intelligence, economics, pattern recognition (fuzzy clustering), medicine, ecology and theory of information [5].

In [6] the Ising model was studied by replacing all the numbers (Ising-spins) by fuzzy numbers and all operations for their correspondents fuzzy operations. In the same article, it was shown that the defuzzified partition function by the center of gravity method engender a partition function of a network of soft-spin scalar (Ginzburg-Landau), and in addition there are other possible models for mapping the network.

In article [7] was proposed a description of evolution of fuzzy systems with uncertainty, and has been shown that this dynamics has the form of a Hamiltonian on the extended state space composed of physical and information components, if used the t-min-norm. It was also shown that if the product t-norm is used,

*renattobsouza@gmail.com

the dynamics in a continuous universe is similar to the dynamics of stochastic, but with the probability distribution exchanged by the density of possibilities.

The present work uses another strategy to put uncertainties into the classical model. As an alternative to [6], it was chosen to preserve the entire fundamental structure –i.e, that concerning Quantum Mechanics– and add uncertainties on the measurable parameters presents, namely, exchange energy J and external magnetic field h . From this, it is proposed a way to build the fuzzy phase diagram for this model and analyze the emergent properties generated by the fuzzyfication process. Additionally the thermodynamic properties are analyzed through confrontation between the physical quantities obtained from the fuzzyfication and defuzzification process with the correspondents classical (standard) quantities.

The outline of this work is as following: in section 2 a quick rememoration of the standard thermodynamic of the concerned model is performed; in section 3, and at appendix, are presented some of the main definitions and results of Fuzzy Sets Theory, in particular results, mainly the **Theorem 3.1** and the **Proposition 3.2**, which will be utilized later on; section 4 discusses the fuzzy thermodynamic of the concerned model, exposed firstly in subsection 4.1 in which it was constructed the fuzzy phase diagram with the support of the mentioned theorems, and after, in subsection 4.2, constituted by the fuzzy graphs of two thermodynamic quantities; finally the conclusions presented in sec. 5.

2 The Model and standard Thermodynamic

The hamiltonian of the one-dimensional spin- $\frac{1}{2}$ Ising Model is given by $H = \sum_{i=1}^N H(\sigma_i, \sigma_{i+1})$, where

$$H(\sigma_i, \sigma_{i+1}) = -J\sigma_i\sigma_{i+1} - \frac{h}{2}(\sigma_i + \sigma_{i+1}), \quad (1)$$

is the interaction energy of a plaquette composed by two Ising-spins, whereas N is the number of sites, $\sigma_i = \pm 1$, J is the exchange constant representing the interaction force beetwen two spins and h symbolizes the external magnetic field.

To study the thermodynamic is necessary the largest eigenvalue Λ_+ of the transfer matrix (further details can be seen in [8]), given by

$$\Lambda_+ = \frac{1}{2} \left(Z_{(1,1)} + Z_{(-1,-1)} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(Z_{(1,1)} - Z_{(-1,-1)} \right)^2 + 4Z_{(1,-1)}Z_{(-1,1)}} \quad (2)$$

where

$$Z_{(\sigma_1\sigma_2)} = \exp(\beta J(\sigma_1\sigma_2) + \frac{\beta h}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)) \quad (3)$$

and $\beta = \frac{1}{kT}$ (in this expression, k is the Boltzmann constant and T is the temperature). So, the free energy of the system in thermodynamic limit reads

$$\mathcal{W} = -\frac{1}{\beta} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln(\Lambda_+^N)}{N} = -\frac{1}{\beta} \ln(\Lambda_+). \quad (4)$$

From this, one can study the standard thermodynamic quantities of the model: entropy ($S = -\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial T}$), specific heat ($C = T \frac{\partial S}{\partial T}$), and magnetization ($M = -\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial h}$).

The building of the phase diagram for this system requires the knowledge of the ground state energies of a plaquette of it, summarized by (1). Thus, the energies in which we are interested are

$$\begin{aligned} E_1(J, h) &= -J - h, \\ E_2(J, h) &= J, \\ E_3(J, h) &= -J + h. \end{aligned} \tag{5}$$

To build it, we must select the lowest value of the three energies above, namely E_1 or E_2 or E_3 , for each value of J and h . After this we plot as in fig. 1. From this figure it is noted that the intersections between the ground state energies, $E_1 \cap E_2$ and $E_1 \cap E_3$ and $E_2 \cap E_3$, are contained in standard phase diagram, forming the boundaries between one energy and another. Selecting it, one obtains as in fig. 2.

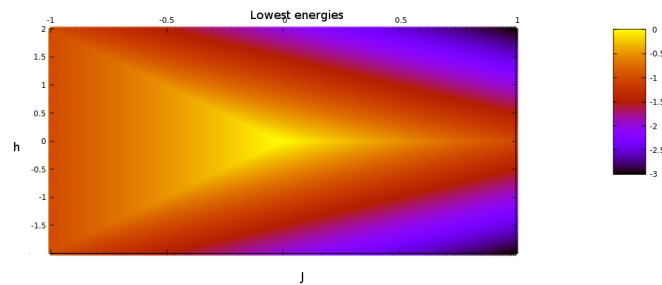


Figure 1: Graph which presents the lowest energies for each pair (J, h) builded from (5). The colors represent values of energy.

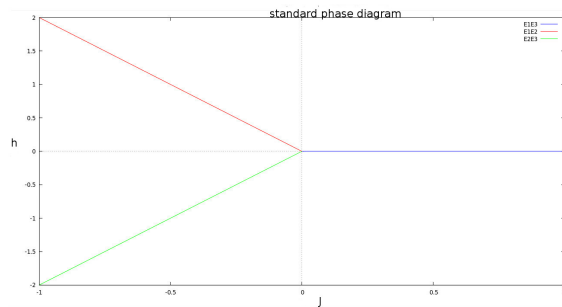


Figure 2: Phase diagram builded from the intersections between ground state energies, displayed in (5).

The analysis by way of graphs of the thermodynamics properties aforementioned is guided by the phase diagram constructed from energies above (see fig. 2). This work intends perform a similar procedure, just by replacing the energies in (5) and the thermodynamic properties by its fuzzy counterparts. However is necessary know how to do that. It is the purpose of next section providing this knowledge.

3 Fuzzy Sets Theory

In general terms, each set can be assigned a membership function, f , which will be responsible for assigning to each element of a previously defined universe set one of the following two values: 0 or 1. If the value of the function in the element is 0, then this element does not belong to referred set; otherwise it belongs.

However, in 1965 Zadeh [9] published a work in which a new class of sets was defined. In this, whose sets are called fuzzy sets, the membership function is allowed to assign any value within the range $[0, 1]$. A good example of a fuzzy set could be a cloud since the interior points closer to the center belong “more” to the cloud than those in its diffuse boundary [5].

There are many useful concepts in Fuzzy Sets Theory, such as α -cuts, fuzzy numbers, and the *Extension Principle* stated by Zadeh for application in fuzzy functions, but all are presented in appendix along with the demonstration of following theorem, a very important result for the developments to come. In it $\mathfrak{F}(\mathbb{R})$ designates the set of all fuzzy numbers.

Theorem 3.1. Let $F : [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta] \rightarrow \mathfrak{F}(\mathbb{R})$ be a function that associates a pair of real numbers to a fuzzy number, defined by

$$F(x, y; a, r_a, b, r_b) = Ag(x) + Bh(y), \tag{6}$$

such that $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ and $h : [\gamma, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ are monotonic functions and A and B are triangular fuzzy numbers, respectively centered in a and b , with r_a and r_b uncertainties given by

$$A(t) = \begin{cases} \frac{t+r_a-a}{r_a}, & \text{if } t \in [a-r_a, a] \\ \frac{r_a+a-t}{r_a}, & \text{if } t \in [a, a+r_a] \end{cases}$$

and

$$B(t) = \begin{cases} \frac{t+r_b-b}{r_b}, & \text{if } t \in [b-r_b, b] \\ \frac{r_b+b-t}{r_b}, & \text{if } t \in [b, b+r_b]. \end{cases}$$

i) If $g(x), h(y) \geq 0, \quad \forall x \in [\alpha, \beta] \quad \text{and} \quad \forall y \in [\gamma, \delta]$, then

$$F(x, y; a, r_a, b, r_b)(t) = \begin{cases} \frac{t+g(x)(a-r_a)+h(y)(b-r_b)}{r_ag(x)+r_bh(y)}, & t \in [g(x)(a-r_a) + h(y)(b-r_b), \\ & ag(x) + bh(y)] \\ \frac{g(x)(a+r_a)+h(y)(b+r_b)-t}{r_ag(x)+r_bh(y)}, & t \in [ag(x) + bh(y), \\ & g(x)(a+r_a) + h(y)(b+r_b)]; \end{cases}$$

ii) If $g(x) \leq 0$ and $h(y) \geq 0 \quad \forall x \in [\alpha, \beta] \quad \text{and} \quad \forall y \in [\gamma, \delta]$, then

$$F(x, y; a, r_a, b, r_b)(t) = \begin{cases} \frac{t+|g(x)|(a+r_a)-h(y)(b-r_b)}{r_a|g(x)|+r_bh(y)}, & t \in [-|g(x)|(a+r_a) + h(y)(b-r_b), \\ & -a|g(x)| + bh(x)] \\ \frac{|g(x)|(a-r_a)+h(y)(b+r_b)-t}{r_ag(x)+r_bh(y)}, & t \in [-a|g(x)| + bh(y), \\ & -|g(x)|(a-r_a) + h(y)(b+r_b)] \end{cases}$$

iii) If $g(x), h(y) \leq 0$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$ and $\forall y \in [\gamma, \delta]$, then

$$F(x, y; a, r_a, b, r_b)(t) = \begin{cases} \frac{t + |g(x)|(a+r_a) + |h(y)|(b+r_b)}{r_a|g(x)| + r_b|h(y)|}, & t \in [-|g(x)|(a+r_a) - |h(y)|(b-r_b), \\ & -a|g(x)| - b|h(y)|] \\ \frac{|g(x)|(a-r_a) + |h(y)|(b+r_b) - t}{r_a|g(x)| + r_b|h(y)|}, & t \in [-a|g(x)| - b|h(y)|, \\ & -|g(x)|(a-r_a) + |h(y)|(b-r_b)] \end{cases}$$

In the following it is enunciated a result that could be stated as an observation; due to its simplicity, the demonstration will be omitted. Nevertheless the appearance, it will play a key role in guiding the interpretation of the results to come.

Proposition 3.2. Let A be a triangular fuzzy number of uncertainty denoted by r such that $A(a) = 1$ and $A(x), A(y) > 0$ such that $|x - y| < r$. We claim that the membership is an “almostness” relation, i.e,

- the membership of x with respect to A is equal to membership of a with respect to X ;
- the memberships of x to Y and of y to X are equal each other;

where X and Y are triangular fuzzy numbers centered in x and in y both of uncertainty r .

Remark 1. We can do the following interpretation, much more suggestive:

- i) Of course a real number is almost itself with degree of success equal to 1;
- ii) If a real number is almost another, then this latter is almost the former with the same degree of success;
- iii) Under the conditions of the proposition, if x is almost a and a is almost y then x is almost y .

4 Fuzzy Thermodynamic

This section is divided in two subsections. In the first one, will be constructed the fuzzy phase diagram for the Ising model. Graphs of a few “fuzzified” thermodynamic properties are displayed in order of examine the behavior of it after the fuzzification process as well as to ascertain the existence of a plausible linking between what the fuzzy phase diagram display and what the fuzzified thermodynamic properties show.

4.1 Fuzzy Phase Diagram

According to [5], the uncertainty, vagueness and ambiguity which are inherent to Fuzzy Mathematics can be attributed to either: (a) presence of subjectivity in the variables chosen or to, (b) lack of complete information of the system in consideration or an incomplete definition of the system. In this work the latter situation is present, since there is no complete and definite information about the values assumed by the magnetic field and the exchange parameter, respectively h and J .

To construct the fuzzy phase diagram, the variables J and h , in (5), will be replaced by their fuzzy counterparts. This can be done by setting

$$\mathbf{J}(J)(t) = S_J(t)J \quad (7)$$

and

$$\mathbf{h}(h)(t) = S_h(t)h, \quad (8)$$

where

$$S_J(t) = \begin{cases} \frac{t + \frac{r_J}{|J|} - 1}{\frac{r_J}{|J|}}, & t \in [1 - \frac{r_J}{|J|}, 1] \\ \frac{\frac{r_J}{|J|} + 1 - t}{\frac{r_J}{|J|}}, & t \in [1, 1 + \frac{r_J}{|J|}] \end{cases}, \quad S_h(t) = \begin{cases} \frac{t + \frac{r_h}{|h|} - 1}{\frac{r_h}{|h|}}, & t \in [1 - \frac{r_h}{|h|}, 1] \\ \frac{\frac{r_h}{|h|} + 1 - t}{\frac{r_h}{|h|}}, & t \in [1, 1 + \frac{r_h}{|h|}]. \end{cases}$$

Note that the functions S_s (“S” of special) were designed in such a way to preserve the uncertainties of J and of h .

Thus the symbolic expressions for the energies stay

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1(J, h) &= -\mathbf{J} - \mathbf{h}, \\ \mathbf{E}_2(J, h) &= \mathbf{J}, \\ \mathbf{E}_3(J, h) &= -\mathbf{J} + \mathbf{h}. \end{aligned} \quad (9)$$

Following the standard procedure, the fuzzy phase diagram is builded from fuzzy operation min of the fuzzy energies above, given by $Min(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$ (see **Proposition A.3**). However with the aid of the **Proposition A.4** and **Theorem 3.1**, one note that among the intersections $\mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_3$ and $\mathbf{E}_2 \cap \mathbf{E}_3$:

- For $J \leq 0$ and $h \geq 0$, only

$$\mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2 \subset Min(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$$

- For $J, h \leq 0$, only

$$\mathbf{E}_2 \cap \mathbf{E}_3 \subset Min(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$$

- For $J \geq 0$ and $h \leq 0$, only

$$(\mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_3) \cup (\mathbf{E}_2 \cap \mathbf{E}_3) \subset Min(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$$

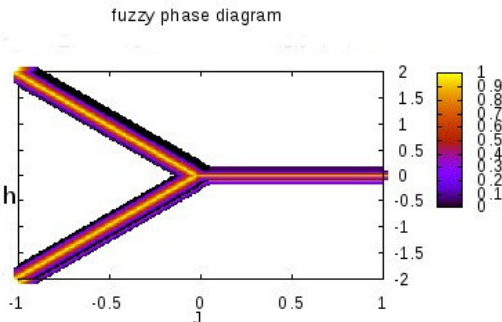
- For $J, h \geq 0$, only

$$(\mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_3) \cup (\mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2) \subset Min(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$$

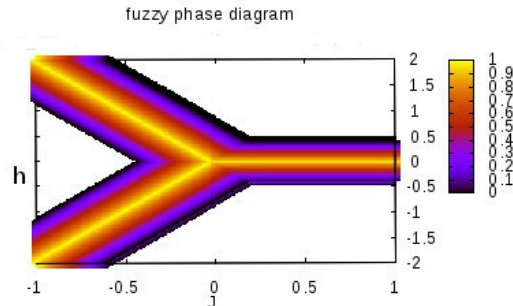
The result above shows that the intersections among the ground state energies are contained in the lowest values of these energies. Because a phase diagram is made up by the intersections among the lowest energies, only referred intersections will be used for build it.

Doing so, the correspondent expressions in fuzzy form will be searched, namely, $\mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_3$, $\mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2$ and $\mathbf{E}_2 \cap \mathbf{E}_3$ and so join it. The calculations of these expressions are easy but tedious, since is necessary deal with the α -cuts of them, but can be performed with help of the **Theorem 3.1** together with his

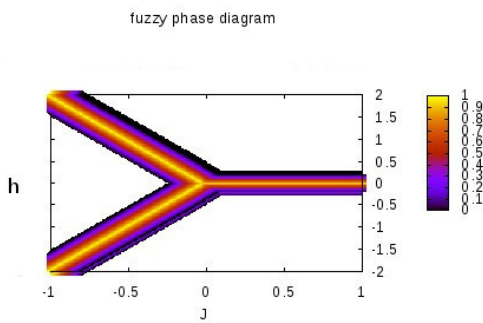
demonstration. After doing them, one finds the functions whose graphs are displayed below. The colors show the membership degree of the points with respect to the associated classical phase diagram ($r_h = r_J = 0$) displayed in fig. 2.



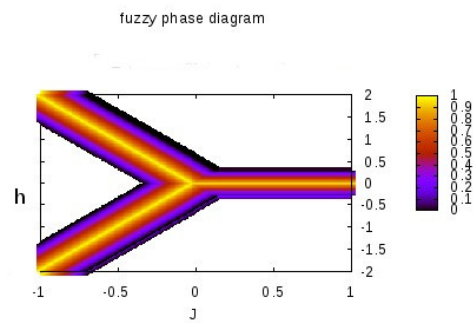
(a) $r_J = 0.1, r_h = 0.$



(b) $r_J = 0.4, r_h = 0.$



(c) $r_J = 0, r_h = 0.4$



(d) $r_J = 0.2, r_h = 0.2$

4.2 Thermodynamic Quantities

Now are presented some fuzzy graphs of two thermodynamic quantities, namely, entropy and magnetization. For the construction of them, it was taken the classical (or standard) expressions of these quantities and we fuzzified it by means of the Extension Principle (**Axiom 4**). Of course that to do this one needs before provide, according to **Axiom 2**, the expressions which will define the fuzzy number associated to variable (J or h) which are intended to “fuzzificate”. In such a case, will be used triangular fuzzy numbers, as those displayed by **Theorem 3.1**.

Also will be shown the associated classical graphs displayed together with the graphs resulting of defuzzification process, in which the center-of-gravity (COG) defuzzification method was utilized. The aim of showing a defuzzified graph is not take it by the true representation of a property of the fuzzy Ising model (whose role is played by the fuzzy graph), but as a way of provide insights on the fuzzified system.

The aim is to ascertain whether the colorful regions presented by the fuzzy phase diagram (i.e, the graphs themselves) coincide with transition zones. For this, was first fixed one variable (J or h) and started with a point away of the plausible zone and compared the fuzzy graph with its correspondent classical version at low temperatures. After this, penetrated into the plausible transition zone and choosed two points on the same line (vertical or horizontal): one immediately before and other immediately after of point on the classical graph (membership equal to one). The two fuzzy grahs was compared between them and among correspondents classical versions. Finally, a point away of the plausible transition zone was taken.

4.2.1 Fuzzy Entropy

If any positive J is identified as ferromagnetic phase and any negative J as antiferromagnetic phase then, according to interpretation of **Proposition 3.2**, may to exist zones in which such phases are not well-defined. More precisely, let $J_1 < 0$ and $J_2 > 0$ be numbers such that $|J_1 - J_2| < r$, where r is the uncertainty on the exchange energy J . So J_1 represent the antiferromagnetic phase whereas J_2 represent the ferromagnetic phase. Hence follows of referred proposition that the antiferromagnetic phase is almost ferromagnetic, and conversely; what lead us to say that these two phase are not well-delimited.

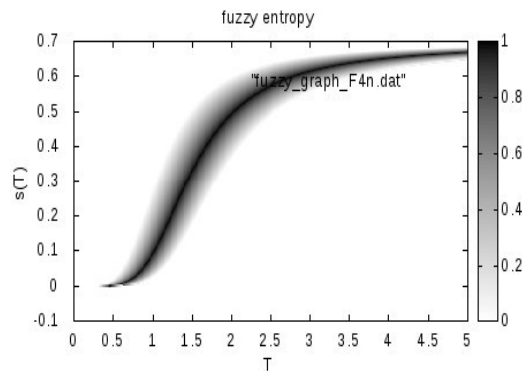


Figure 3: Fuzzy entropy in which $r_J = 0.4$, $r_h = 0$, $J = 1$ and $h = 0.4$. The colors show the membership degree of points with respect to the associated classical graph.

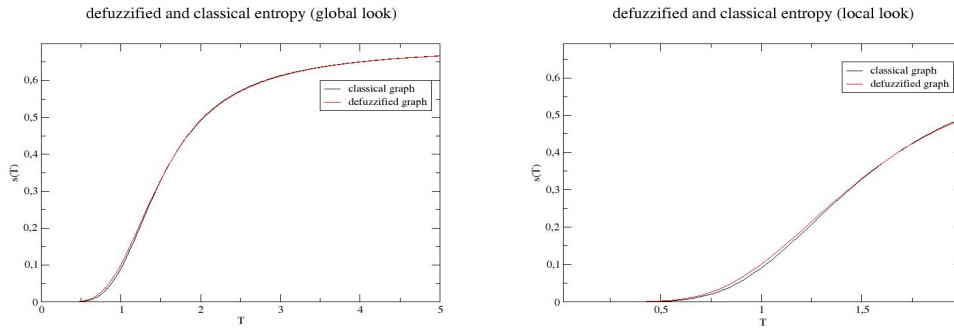


Figure 4: On the left side, the classical graph with $J = 1$ and $h = 0.4$, overlapped to defuzzification of the fuzzy graph above (see fig.3). On the right side, the behavior at low temperatures. Note that the starting point of the larger membership line of the fuzzy graph is the same that one of its classical version.

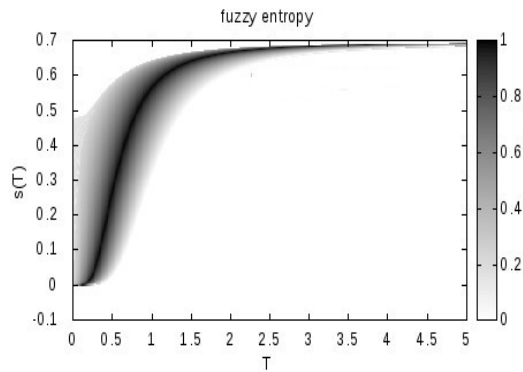


Figure 5: Fuzzy entropy in which $r_J = 0.4$, $r_h = 0$, $J = 0.15$ and $h = 0.4$. The colors show the membership degree of points with respect to the associated classical graph.

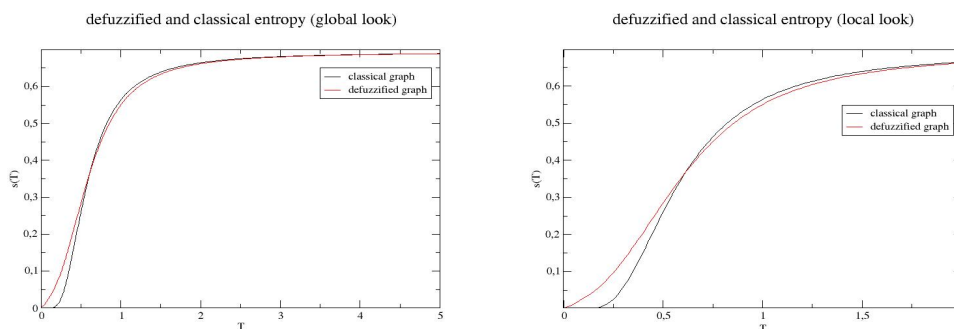


Figure 6: On the left side, the classical graph in which $J = 0.2$, $h = 0.4$ overlapped to defuzzification of the fuzzy graph above (see fig.5). On the right side, the behavior at low temperatures. The analysis of these graphs must be made together with next graphs (see figs 7 and 8). Note that given a fuzzy graph (e.g. that of fig. 5), the range at near zero temperatures comprehend the starting point of the classical graph associated to the other fuzzy graph (in this case, that one of fig.7).

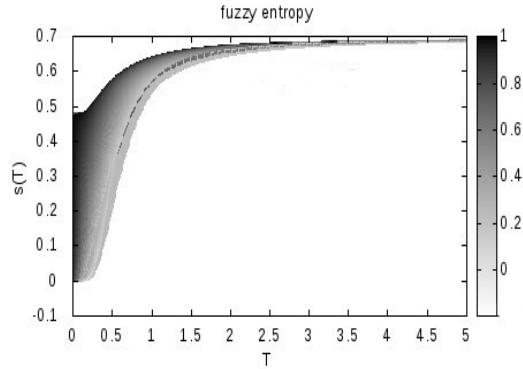


Figure 7: Fuzzy entropy in which $r_J = 0.4$, $r_h = 0$, $J = -0.15$ and $h = 0.4$. Should be noted that both the fuzzy graphs (this and the previous) has a global behaviour very similar. The colors show the membership degree of points with respect to the associated classical graph.

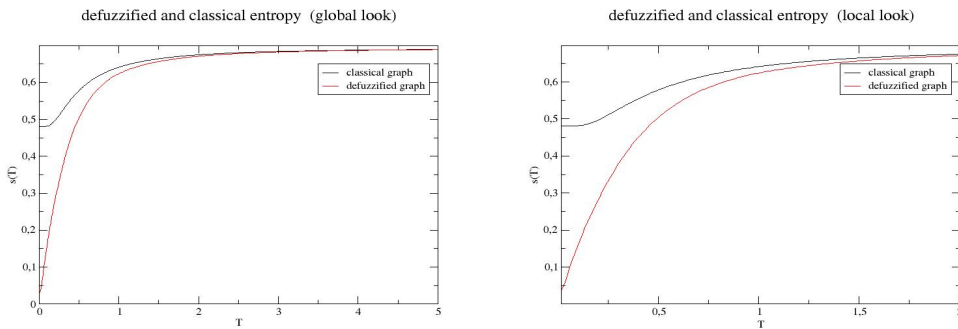


Figure 8: On the left side, the classical graph with $J = -0.15$ and $h = 0.4$, overlapped to defuzzification of the fuzzy graph above (see fig. 7). The analysis is the same that one in previous case.

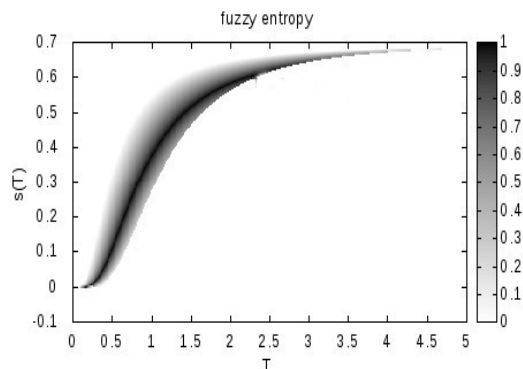


Figure 9: Fuzzy entropy in which $r_J = 0.4$, $r_h = 0$, $J = -1$ and $h = 0.4$. The colors show the membership degree of points with respect to the associated classical graph.

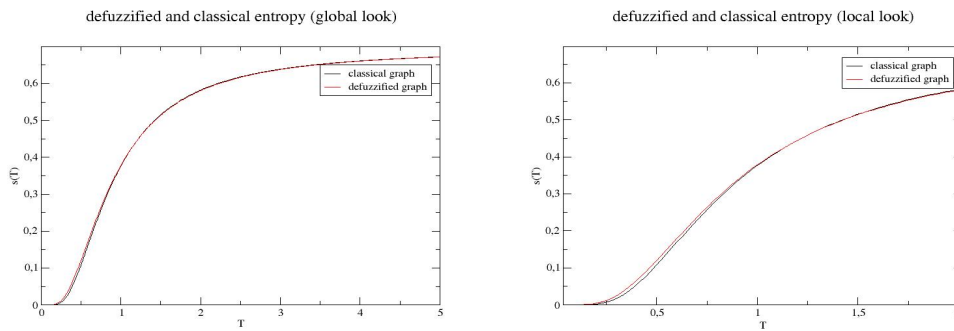


Figure 10: On the left side, the classical graph with $J = -1$ and $h = 0.4$, overlapped to defuzzification of the fuzzy graph above (see fig.9). Note that, in the fuzzy graph, the starting point of the larger membership line is the same that one of its classical version.

If the fuzzy graph in fig. 3 and the classical graph in fig. 4 are compared each other, and the fuzzy graph in fig. 9 and the classical graph in fig. 10 also are compared each other, it will be noted that the fuzzy graphs are very similar to their classical counterparts. This fact is strengthened by the perfect overlapping displayed between the classical graphs and the defuzzified graphs.

On the other hand, the fuzzy graphs lying in figures 5 and 7 are morphologically similar each other, with special attention to temperatures near zero. This happen due to proximity between J s. It may be necessary to note that the differences between the defuzzified graphs and the correspondents classical versions displayed, respectively, in figures 6 and 8, are remarkable.

4.2.2 Fuzzy Magnetization

An analysis will now be developed taking into account only changes in horizontal direction of the fuzzy phase diagram. More precisely, it will be fixed a value of J and leave the other variable, namely h , moving. Hence the fuzzy phase diagram (c) will be used. Often the analysis of concerned fuzzy phase diagram will have a classical phase diagram as reference. The phase diagram (a) display three approximately well-delimited regions, what allow us to use it in practical analysis following. For such a phase diagram (i.e, a classical phase diagram) one see that for a fixed J the transition between a region and the adjacent to it is “abrupt”, in sense that it occurs through an only point. This is the most important characteristic of a classical phase diagram that will be used here. In the following, again the whole analysis will be performed with the help of **Proposition 3.2**. In all graphs below $J = -0.5$. One start with a point away of the likely transition zone (note that in this moment we are referring to the fuzzy phase diagram (c)), namely, $h = 0.5$. The correspondent graphs to this point are presents in figures 11 and 12. In this case, note that the behavior of the fuzzy graph is similar to its associated classical graph, at least at low temperatures, that is what matter. Now compare the fuzzy graphs of the figures 13, 15 and 17 each other. The behavior of the three fuzzy graphs near zero are very similar, in agreement with the **Proposition 3.2**, because the uncertainty is $r_h = 0.4$. Therefore these three fuzzy graphs, considered in sequence, suggest us that the transition in progress is “smooth”, in opposition to the classic case which, for $J = -0.5$, shall occur on

the point $h = 1$, as is easy realize. Note, still, that the differences between the defuzzified graphs and the respective classical versions are remarkable. Lastly, because the fuzzy graph of fig. 19 is away of transition zone, it is similar to its correspondent classical version.

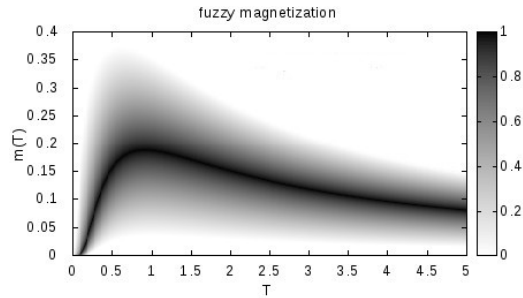


Figure 11: Fuzzy magnetization in which $r_J = 0$, $r_h = 0.4$, $J = -0.5$ and $h = 0.5$. The colors show the membership degree of points with respect to the associated classical graph.

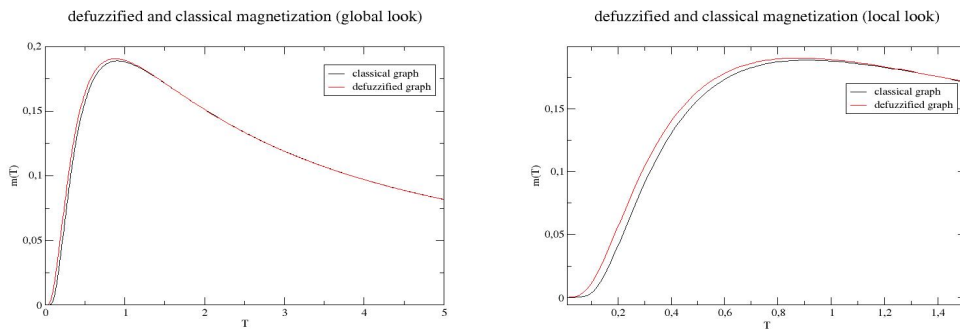


Figure 12: On the right side, the correspondent classical graph with $J = -0.5$ and $h = 0.5$, overlapped to defuzzification of the fuzzy graph above (see fig.11). On the left side, the behavior at low temperatures. Note that because the fuzzy graph is away of the classical transition point (which is $h = 1$), the starting points of both of the graphs in this figure are the same.

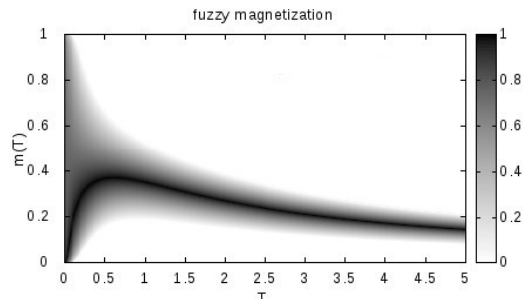


Figure 13: Fuzzy magnetization in which $r_J = 0$, $r_h = 0.4$, $J = -0.5$ and $h = 0.9$. The colors show the membership degree of points with respect to the associated classical graph.

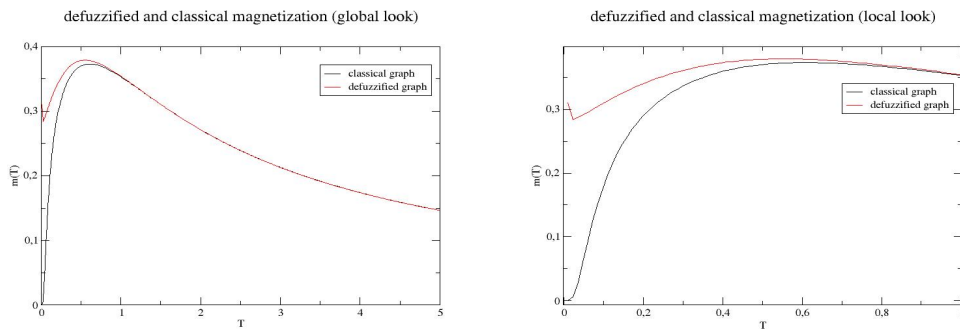


Figure 14: On the right side, the classical graph with $J = -0.5$, $h = 0.5$ overlapped to defuzzification of the fuzzy graph above (see fig.13). This fuzzy graph together with the two next fuzzy graphs (namely, fig.15 and 17) must be analysed at same time. Note that the distance of the concerned point ($h = 0.9$) to the classical transition point ($h = 1$) is less than the uncertainty r_h , so we are into transition zone.

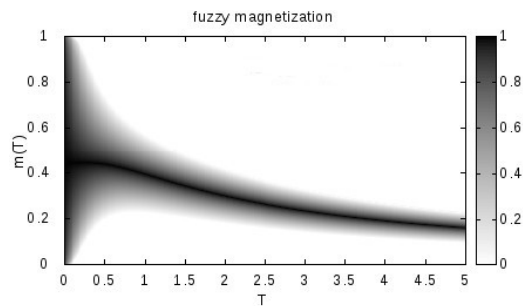


Figure 15: Fuzzy magnetization in which $r_j = 0$, $r_h = 0.4$, $J = -0.5$ and $h = 1$. The colors show the membership degree of points with respect to the associated classical graph.

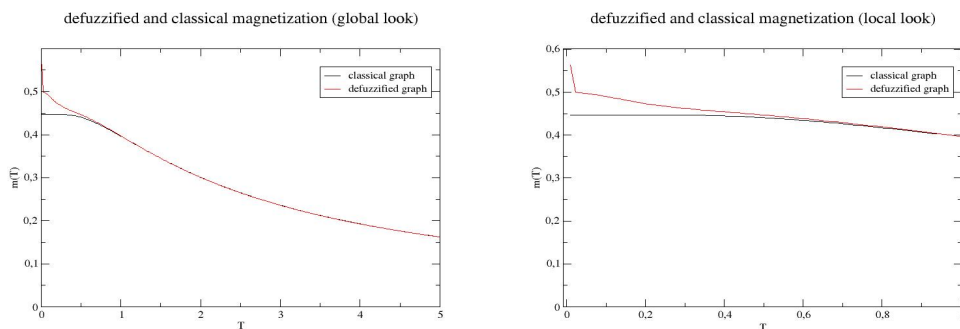


Figure 16: On the right side, the classical graph in which $J = -0.5$, and $h = 1$, overlapped to defuzzification of the fuzzy graph above (see fig.15). Now we are on the classical transition point.

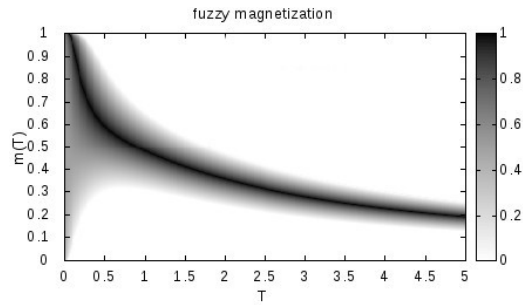


Figure 17: Fuzzy magnetization in which $r_J = 0$, $r_h = 0.4$, $J = -0.5$ and $h = 1.2$. Because we are still into transition zone, the behavior of this graph near zero tend to be similar to that one presented by two last fuzzy graphs. The colors show the membership degree of points with respect to the associated classical graph.

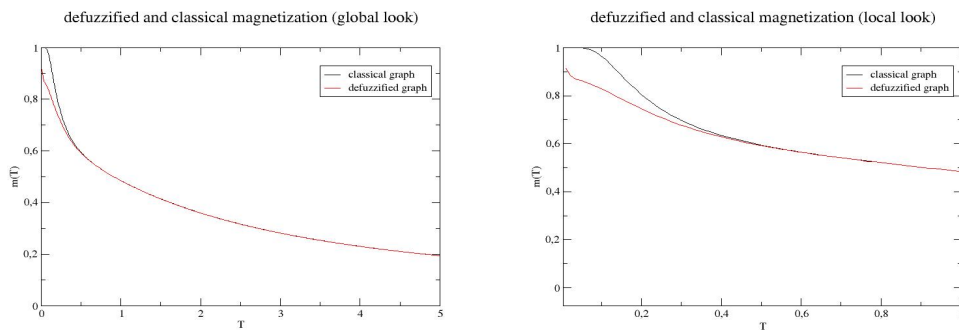


Figure 18: On the right side, the classical graph in which $J = -0.5$, and $h = 1.2$, overlapped to defuzzification of the fuzzy graph above (see fig.17).

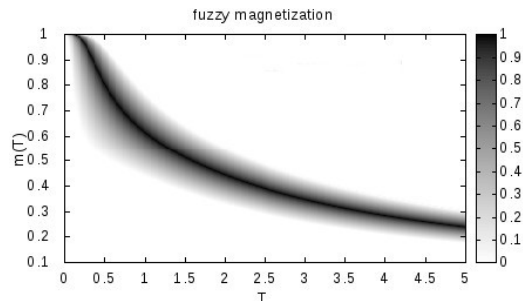


Figure 19: Fuzzy magnetization in which $r_J = 0$, $r_h = 0.4$, $J = -0.5$ and $h = 1.5$. The colors show the membership degree of points with respect to the associated classical graph.

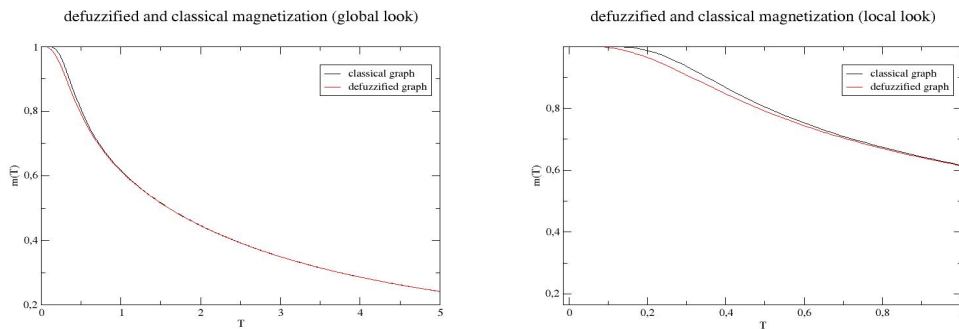


Figure 20: On the right side, the classical graph with $J = -0.5$, and $h = 1.5$, overlapped to defuzzification of the fuzzy graph above (see fig.19). Because we are out of the transition zone, the behavior of fuzzy graph near zero is similar to the presented by its associated classical graph in the same region.

5 Conclusions

One can list at least three interesting points, necessarily not independent of each other:

- i) Firstly, it was noticed that the connection between the phase diagram and the behavior of the thermodynamic properties in addition to be retained is generalized after to be done the fuzzification;
- ii) For fixed J (or h), after the fuzzification the transition zones leave to be single points for becomes a set of them. The outcome of this is an apparently more “smooth” transition;
- iii) And finally, it was noted that the more salient discrepancies between the defuzzified and classical graphs become manifest at low temperatures when the measurable parameters J and h takes values in transition zones.

One can conclude by noting two points which are not entirely irrelevant about the analytical method for the construction of some fuzzy phase diagrams developed by this work: at same time teach to fuzzificate a class of functions, namely monotonic functions, it show how analytically to deal with them.

Acknowledgement Renatto thank CNPq for financial support.

References

- [1] BAXTER, R.J. *Exactly solved models in Statistical Mechanics*, Academic Press, N.Y., 1982.
- [2] STAUFFER, D. *Social applications of two-dimensional ising models*. Am. J. Phys. **76**, April/May 2008.
- [3] LIU, Y.; DILGER, J. P. *Application of the one- and two-dimensional Ising models to studies of cooperativity between ion channels*. Biophys J. 1993 Jan; 64(1): 26-35.

- [4] GUPTA, M. L. *On the applicability of ising and other statistical models to phase transition in biomembranes*. Journal of Biological Physics, March 1973, Vol. 1, Issue 1, pp 17-25.
- [5] CASTILLO-MUSSOT, M.; Dias, R. C. *Fuzzy sets and physics*. Revista Mexicana de Física **39**, No 2 (1993) 295-303.
- [6] Horigushi, T. Phys. Letter **A176**, (1993) 179-183.
- [7] FRIEDMAN, Y.; SANDLER, U. *Fuzzy Sets and Systems*, **106**, (1999) 61-74.
- [8] HUANG, K. *Statistical Mechanics*. United States of America: Braun-Brumfield, 1963
- [9] ZADEH, L. A. *Fuzzy sets*. Information and Control, Berkeley, v. 8. n. 1, p. 338-353, 1965.
- [10] KLIR, G. J.; YUAN, B. *Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications*. New Jersey: Prentice Hall, 1995. 574 p.
- [11] HONG, D. H.; KIM, K. T. *An easy computation of min and max operations for fuzzy numbers*. J. Appl. Math. and Computing Vol. 21(2006), No. 1-2, pp. 555-561.
- [12] CHEN, G.; PHAM, T. T. *Introduction to fuzzy sets, fuzzy logic, and fuzzy control systems*. Boca Raton, Florida: CRC Press, 2001. 329 p.
- [13] BARROS, L.C.; BASSANEZI, R.C. Ecological Modelling **128**, 27-33, (2000).
- [14] CHALCO-CANO, Y.; ROMÁN-FLORES H.; ROIJAS-MEDAR M.; SAAVEDRA, O.R.; JIMENÁZ-GAMERO M.D. Information Sciences **177**, 5394-5403, (2007).
- [15] BEDE, B. *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*, Springer, New York, 2013.

A Appendix: Fuzzy Sets Theory

In this section are presented some definitions and results concerning fuzzy sets. For this, just for sake of clarity, firstly are stated some axioms designed to treat indistinctly both classical sets and fuzzy sets. Because are widely discussed in literature, no reference will be made except in special cases. For an approach much more verbose, see [10].

Axiom 1. There exists a set.

Remark 2. It will be called it *universe set* and denoted by U .

Defintion 1. [membership function] It is said that f is a membership function if its domain is U and its image is contained in $[0, 1]$; $f : U \rightarrow [0, 1]$.

Definition 2. [support] It is called *support* of $f : U \rightarrow [0, 1]$ the collection of elements of U such that the image of each of which under f is nonzero ($f(x) > 0$).

Axiom 2. A set is entirely defined by its membership function f .

Remark 3. Due to this axiom will be employed the same symbol to represent both the set and its associated membership function.

Axiom 3. The membership function of U is $U : U \rightarrow [0, 1]$, such that $U(x) = 1, \quad \forall x \in U$.

Definition 3. [subset] A is a subset of B , and denoted $A \subset B$, if

$$A(x) \leq B(x), \quad \forall x \in U.$$

Remark 4. It's easy to conclude that every set is subset of U . It will be assumed this tacitly hereafter.

Definition 4. [intersection] If A and B are sets, then the intersection between them is the set

$$(A \cap B)(x) = \min \{A(x), B(x)\}, \quad x \in U.$$

Definition 5. [union] If A and B are sets, then the union between them is the set

$$(A \cup B)(x) = \max \{A(x), B(x)\}, \quad x \in U.$$

Definition 6. [α -cut] Let A be a set. The α -cut of A , A^α , where $\alpha \in [0, 1]$, is the set defined as follows:

$$A^\alpha(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } A(x) \geq \alpha \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

for all $x \in U$.

Proposition A.1. [10] If A and B are sets, then

- i) $(A \cup B)^\alpha = A^\alpha \cup B^\alpha$,
- ii) $(A \cap B)^\alpha = A^\alpha \cap B^\alpha$.

Proposition A.2. [10] $A \subset B \Leftrightarrow A^\alpha \subset B^\alpha, \quad \forall \alpha \in [0, 1]$.

The next axiom which stated is the renowned *Extension Principle* of Zadeh (see [9]). From it, the thermodynamic properties in a strictly computacional process will be *fuzzificate*.

Axiom 4. [Extension Principle] Let $f : M \rightarrow N$ be a function such that $M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k$, and let $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k \subset M$ and $B \subset N$ be sets. The induced sets by f from the latter has the following memberships functions:

$$f^{-1}(B) : U \rightarrow [0, 1],$$

defined by

$$f^{-1}(B)(x) = B(f(x)),$$

and

$$f(A) : U \rightarrow [0, 1],$$

defined by

$$f(A)(y) := \sup_{y=f(x_1, x_2, \dots, x_k)} \min \{A_1(x_1), A_2(x_2), \dots, A_k(x_k)\}.$$

Definition 7. [fuzzy number] Let $A : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ be a set. It is a *fuzzy number* if it satisfy the following conditions:

- i) There exists x such that $A(x) = 1$,
- ii) A^α is compact for all $\alpha \in (0, 1]$,
- iii) the support of A is bounded.

The last axiom able us to extent the four arithmetic operations as well as the *min* and *max* operations to the fuzzy numbers.

Definition 8. If A and B are fuzzy numbers and $*$ any of the arithmetic operations (such as sum, subtraction, multiplication and division), then

$$(A * B)(z) = \sup_{z=x*y} \min \{A(x), B(y)\},$$

$$\text{Min}(A, B)(z) = \sup_{z=\min\{x,y\}} \min \{A(x), B(y)\},$$

$$\text{Max}(A, B)(z) = \sup_{z=\max\{x,y\}} \min \{A(x), B(y)\}.$$

Proposition A.3. [11] Let A and B continuous fuzzy numbers such that $A^\alpha = [a_1(\alpha), b_1(\alpha)]$ e $B^\alpha = [a_2(\alpha), b_2(\alpha)]$. Then

$$\text{Min}(A, B)^\alpha = [\min \{a_1(\alpha), a_2(\alpha)\}, \min \{b_1(\alpha), b_2(\alpha)\}],$$

$$\text{Max}(A, B)^\alpha = [\max \{a_1(\alpha), a_2(\alpha)\}, \max \{b_1(\alpha), b_2(\alpha)\}].$$

The next result will be very useful for the decision on how will be constructed the fuzzy phase diagram. The correspondent demonstration can be found in [11] in an indirect way.

Proposition A.4. [11] Let A and B be any fuzzy sets. Then $A \cap B \subset \text{Min}(A, B)$

In the following are stated two lemmas which will provide support for the demonstration of the main result of this work withing the framework of Fuzzy Sets Theory.

Lemma A.1. [12] If $[a, b]$ and $[c, d]$ are intervals of real line, then

$$\begin{aligned} [a, b] + [c, d] &= [a + c, b + d] \\ [a, b] - [c, d] &= [a - d, b - c]. \end{aligned}$$

Lemma A.2. [10] If A e B are continuous fuzzy numbers, then

$$(A * B)^\alpha = A^\alpha * B^\alpha,$$

for $\alpha \in [0, 1]$.

Lemma A.3. [10] If A is a set, then

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0, 1]} \alpha A^\alpha,$$

that is,

$$A = \sup_{\alpha \in [0, 1]} \{\alpha A^\alpha\}.$$

Finally will be stated and demonstrated the most important result of this appendix.

Theorem A.8. Let $F : [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta] \rightarrow \mathfrak{F}(\mathbb{R})$ be a function that associates a pair of real numbers to a fuzzy number, defined by

$$F(x, y; a, r_a, b, r_b) = Ag(x) + Bh(y), \tag{10}$$

such that $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ and $h : [\gamma, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ are monotonic functions and A and B are triangular fuzzy numbers, respectively centered in a and b , with r_a and r_b uncertainties given by

$$A(t) = \begin{cases} \frac{t+r_a-a}{r_a}, & \text{if } t \in [a-r_a, a] \\ \frac{r_a+a-t}{r_a}, & \text{if } t \in [a, a+r_a] \end{cases}$$

and

$$B(t) = \begin{cases} \frac{t+r_b-b}{r_b}, & \text{if } t \in [b-r_b, b] \\ \frac{r_b+b-t}{r_b}, & \text{if } t \in [b, b+r_b]. \end{cases}$$

i) If $g(x), h(y) \geq 0$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$ and $\forall y \in [\gamma, \delta]$, then

$$F(x, y; a, r_a, b, r_b)(t) = \begin{cases} \frac{t+g(x)(a-r_a)+h(y)(b-r_b)}{r_ag(x)+r_bh(y)}, & t \in [g(x)(a-r_a) + h(y)(b-r_b), \\ & ag(x) + bh(y)] \\ \frac{g(x)(a+r_a)+h(y)(b+r_b)-t}{r_ag(x)+r_bh(y)}, & t \in [ag(x) + bh(y), \\ & g(x)(a+r_a) + h(y)(b+r_b)]; \end{cases}$$

ii) If $g(x) \leq 0$ and $h(y) \geq 0 \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$ and $\forall y \in [\gamma, \delta]$, then

$$F(x, y; a, r_a, b, r_b)(t) = \begin{cases} \frac{t+|g(x)|(a+r_a)-h(y)(b-r_b)}{r_a|g(x)|+r_bh(y)}, & t \in [-|g(x)|(a+r_a)+h(y)(b-r_b), \\ & -a|g(x)|+bh(x)] \\ \frac{|g(x)|(a-r_a)+h(y)(b+r_b)-t}{r_ag(x)+r_bh(y)}, & t \in [-a|g(x)|+bh(y), \\ & -|g(x)|(a-r_a)+h(y)(b+r_b)] \end{cases}$$

iii) If $g(x), h(y) \leq 0, \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$ and $\forall y \in [\gamma, \delta]$, then

$$F(x, y; a, r_a, b, r_b)(t) = \begin{cases} \frac{t+|g(x)|(a+r_a)+|h(y)|(b-r_b)}{r_a|g(x)|+r_b|h(y)|}, & t \in [-|g(x)|(a+r_a)-|h(y)|(b-r_b), \\ & -a|g(x)|-b|h(y)|] \\ \frac{|g(x)|(a-r_a)+|h(y)|(b+r_b)-t}{r_ag(x)+r_bh(y)}, & t \in [-a|g(x)|-b|h(y)|, \\ & -|g(x)|(a-r_a)+|h(y)|(b-r_b)] \end{cases}$$

Proof. It will be proved only the item i). The remaining proofs are analogous.

In accordance with last stated lemma, one can express any set in terms of its α -cuts. Therefore,

$$F(x, y) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha F^\alpha(x, y),$$

where

$$\begin{aligned} F^\alpha(x, y) &= (g(x)A + h(y)B)^\alpha \\ &= (g(x)A)^\alpha + (h(y)B)^\alpha \\ &= g(x)A^\alpha + h(y)B^\alpha. \end{aligned} \tag{11}$$

The last step is of very easy checking.

Firstly we will find the α -cuts:

$$A(t) = \frac{t+r_a-a}{r_a} \geq \alpha \Rightarrow t \geq r_a(\alpha-1) + a,$$

$$A(t) = \frac{r_a+a-t}{r_a} \geq \alpha \Rightarrow t \leq r_a(1-\alpha) + a,$$

$$\Rightarrow A^\alpha = [r_a(\alpha-1) + a, r_a(1-\alpha) + a].$$

$$B(t) = \frac{t+r_b-b}{r_b} \geq \alpha \Rightarrow t \geq r_b(\alpha-1) + b,$$

$$B(t) = \frac{r_b+b-t}{r_b} \geq \alpha \Rightarrow t \leq r_b(1-\alpha) + b,$$

$$\Rightarrow B^\alpha = [r_b(\alpha - 1) + b, r_b(1 - \alpha) + b].$$

Thus,

$$\begin{aligned} F^\alpha(x, y) &= g(x)[r_a(\alpha - 1) + a, r_a(1 - \alpha) + a] + h(y)[r_b(\alpha - 1) + b, r_b(1 - \alpha) + b] \\ &= [g(x)r_a(\alpha - 1) + g(x)a + h(x)r_b(\alpha - 1) + h(y)b, g(x)r_a(1 - \alpha) + g(x)a + \\ &\quad h(y)r_b(1 - \alpha) + h(x)b], \end{aligned} \tag{12}$$

if

$$g(x), h(y) \geq 0, \quad \forall x \in [\alpha, \beta] \quad \text{and} \quad \forall y \in [\gamma, \delta].$$

$$\begin{aligned} \underline{\alpha = 0}: & \quad [g(x)(a - r_a) + h(y)(b - r_b), g(x)(r_a + a) + h(y)(b + r_b)] \\ \underline{\alpha = 1}: & \quad [ag(x) + bh(y), ag(x) + bh(y)] \end{aligned} \tag{13}$$

First interval:

$$\begin{aligned} g(x)r_a(\alpha - 1) + ag(x) + h(y)r_b(\alpha - 1) + bh(y) &\leq t \leq ag(x) + bh(y) \\ \Rightarrow \alpha &\leq \frac{t + g(x)(a - r_a) + h(y)(b - r_b)}{r_ag(x) + r_bh(y)} \leq 1. \end{aligned}$$

We know that

$$\begin{aligned} F(x, y)(t) &= \sup_{\alpha} \{ \alpha F^\alpha(x, y)(t) \}; \\ F(x, y)^\alpha(t) &= \begin{cases} 1, & t \in [g(x)(a - r_a) - |h(y)|(b - r_b), ag(x) + bh(y)] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \\ \Rightarrow \alpha F(x, y)^\alpha(t) &= \begin{cases} \alpha, & t \in [g(x)(a - r_a) - |h(y)|(b - r_b), ag(x) + bh(y)] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

Thus,

$$F(x, y)(t) = \frac{t + g(x)(a - r_a) + h(y)(b - r_b)}{r_ag(x) + r_bh(y)}, \tag{14}$$

if

$$t \in [g(x)(a - r_a) + h(y)(b - r_b), ag(x) + bh(y)].$$

Second interval:

$$\begin{aligned} ag(x) + bh(y) &\leq t \leq r_ag(x)(1 - \alpha) + ag(x) + r_bh(y)(1 - \alpha) + bh(x) \\ \Rightarrow \alpha &\leq \frac{(a + r_a)g(x) + (b + r_b)h(y) - t}{r_ag(x) + r_bh(y)} \leq 1. \end{aligned}$$

Therefore,

$$F(x,y)(t) = \frac{(a+r_a)g(x) + (b+r_b)h(y) - t}{r_ag(x) + r_bh(y)}, \quad (15)$$

if

$$t \in [ag(x) + bh(y), g(x)(a+r_a) + h(y)(b+r_b)].$$

□

A VIDEOANÁLISE DE UMA BOLA SALTITANTE: UM ESTUDO SOBRE AS PERDAS DE ENERGIA UTILIZANDO APLICATIVOS PARA SMARTPHONES

FRANCISCO ADEIL GOMES DE ARAÚJO*

Secretaria de Educação Básica do Ceará- SEDUC

EEMTI Estado do Amazonas, Bela Vista, Fortaleza-CE CEP 60441-750

MEIRIVÂNI MENESES DE OLIVEIRA

Secretaria de Educação Básica do Ceará- SEDUC, Av. Gen.

Afonso Albuquerque Lima, Cambeba, Fortaleza - CE CEP: 60822-325

ELONEID FELIPE NOBRE

Universidade Federal do Ceará - UFCE Campus do Pici, BL 902

Av. Mister Hull, s/n - Pici, Fortaleza - CE, 60455-760

ALEXANDRE GONÇALVES PINHEIRO

Faculdade de Educação, Universidade Estadual do Ceará- UECE,

Planalto Universitário, Quixadá-CE, CEP: 63.900-000

MARCONY SILVA CUNHA

Departamento de Física, Universidade Estadual do Ceará - UECE

Av. Dr. Silas Munguba, 1700, Itaperi, 60714-903, Fortaleza-CE

Abstract

O tema das colisões nem sempre é bem compreendido pelos estudantes das escolas secundárias. Este trabalho apresenta uma atividade experimental para alunos do ensino secundário com o objetivo de consolidar o estudo de colisões e nortear a ação pedagógica dos professores. Foram utilizados dois aplicativos de videoanálises para estudar as perdas de energia em uma colisão entre uma bola de tênis e uma mesa. Obtivemos e analisamos as velocidades em cada eixo, as alturas máximas alcançadas pela bola, a perda de energia cinética após cada impacto com a mesa e o coeficiente de restituição da colisão. A utilização dos recursos do smartphone permitiu estabelecer uma interação entre a teoria e a aplicação do conhecimento físico a situações concretas, possibilitando o aprendizado com diferentes representações como gráficos, diagramas, tabelas, imagens e o próprio vídeo. Isso permitiu aos alunos desempenhar um papel mais ativo a partir da utilização do smartphone como instrumento de medição e análise.

Palavras-chave: Energia; Colisões; Ensino de Física; Videoanálise; Tecnologias Educacionais.

*chicoadeil@gmail.com

1 Introdução

Bolas de bilhar que se chocam, correntes de água que colidem com as pás de uma turbina, nêutrons que se chocam com núcleos atômicos em um reator nuclear, colisões entre dois carros e o impacto de um meteoro na superfície terrestre. Todos estes eventos são exemplos de colisões, presentes, em maior ou menor escala, no cotidiano dos cidadãos.

O que é então uma colisão? De acordo com Sears e Zemansky [1], “colisão é qualquer vigorosa interação entre dois corpos com uma duração relativamente curta”.

No intuito de explorar e desenvolver esse tema com os estudantes, este trabalho buscou explorar o coeficiente de restituição e a perda de energia cinética após a colisão entre uma bola de tênis e uma mesa, utilizando aplicativos de videoanálises para smartphones.

A utilização de smartphones em sala de aula apresenta várias vantagens, principalmente em escolas que sofrem com a falta de laboratórios equipados. Segundo Rath [2], os smartphones são verdadeiros “canivetes suíços digitais”. Eles possuem diversos sensores e aplicativos que facilitam a aprendizagem e o ensino de Física, embora não tenham sido fabricados com este propósito. Kunh, Müller, Hirth, Hochberg, Klein e Molz [3] explicam que

[...] o sensor de aceleração é usado para determinar a inclinação e ajustar a orientação da tela do dispositivo, o sensor de força de campo magnético é usado como uma bússola para ajudar a navegação para o aparelho. Outros sensores são usados, por exemplo, para informar ao usuário dados específicos do local (clima), ambiente (temperatura, pressão, umidade, etc).

A possibilidade de realizar diversos experimentos utilizando sensores e aplicativos de smartphones e analisá-los através de gráficos e tabelas faz com que os alunos adquiram uma maior capacidade de lidar com múltiplas representações e segundo Hirth Kunh, Müller, Rohs, Klein [4]: “os alunos com maior capacidade de lidar com representações têm maiores competências nas resoluções de problemas”. Já Klein, Kuhn, Müller, Gröber [5], vão além e afirmam que

A utilização de dispositivos móveis como um instrumento de medição e análise permitirá aos alunos desempenharem um papel mais ativo nos processos de resolução de problemas. Eles se envolvem no experimento, coletam e analisam dados experimentais e, portanto, experimentam autonomia, o que é dito para estimular a motivação.

Desta maneira, com o objetivo de contribuir para o ensino de mecânica em sala de aula no primeiro ano do ensino secundário, este trabalho busca:

- (a) Fazer com que os smartphones sejam vistos como recurso didático em sala de aula;
- (b) Estabelecer uma interação entre a teoria e a aplicação do conhecimento físico a situações concretas;
- (c) Possibilitar o aprendizado com diferentes representações como gráficos, diagramas, tabelas, imagens e o próprio vídeo;

(d) Permitir aos alunos um papel mais ativo a partir da utilização do smartphone como instrumento de medição e análise.

Para alcançar estes objetivos, o artigo está organizado da seguinte forma: Na primeira seção, será apresentada uma revisão teórica abordando o coeficiente de restituição e a perda de energia cinética após cada impacto. Na segunda seção, será descrito como o experimento foi realizado e as análises dos resultados. Na terceira seção, será feita uma reflexão sobre como o professor poderá explorar este tipo de experimento em sala de aula e finalmente, será feita algumas considerações sobre a viabilidade deste trabalho e as perspectivas para o seu desenvolvimento.

2 Coeficiente de restituição e a perda de energia cinética por impacto: uma revisão teórica

O objetivo desta seção é verificar o que acontece em uma colisão em que um dos objetos é uma bola de tênis e o outro é uma mesa, com a massa muito maior que esta.

Quando a bola é solta de uma determinada altura, ela cai com uma certa velocidade em relação à mesa. Esta é a chamada de velocidade de aproximação. Após a colisão com a mesa a velocidade de afastamento terá um valor que é diferente da velocidade de aproximação porque parte da energia cinética inicial é perdida.

Para verificar se a colisão está próxima do caso elástico ou do caso perfeitamente inelástico, podemos encontrar o coeficiente de restituição da colisão, que é a medida da elasticidade da colisão e definida como

$$e = \frac{v_{afastamento}}{v_{aproximacao}}. \quad (1)$$

Se o coeficiente de restituição for igual a 1, as colisões serão elásticas, mas se for igual a 0, serão colisões perfeitamente inelásticas.

Para se calcular o coeficiente de restituição em relação à altura, h_1 , em que a bola foi abandonada, e a altura, h_2 , para a qual a bola retorna após quicar na mesa, usa-se a lei da conservação da energia

$$mgh_1 = \frac{mv_{aproximacao}^2}{2} \rightarrow v_{aproximacao} = \sqrt{2gh_1}, \quad (2)$$

e

$$mgh_2 = \frac{mv_{afastamento}^2}{2} \rightarrow v_{afastamento} = \sqrt{2gh_2}. \quad (3)$$

Substituindo (2) e (3) em e (1), tem-se que

$$e = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}. \quad (4)$$

Pode-se também encontrar a expressão que relaciona o coeficiente de restituição com a fração de energia perdida durante o impacto. Para isso basta elevar a equação 1 ao quadrado e multiplicar o

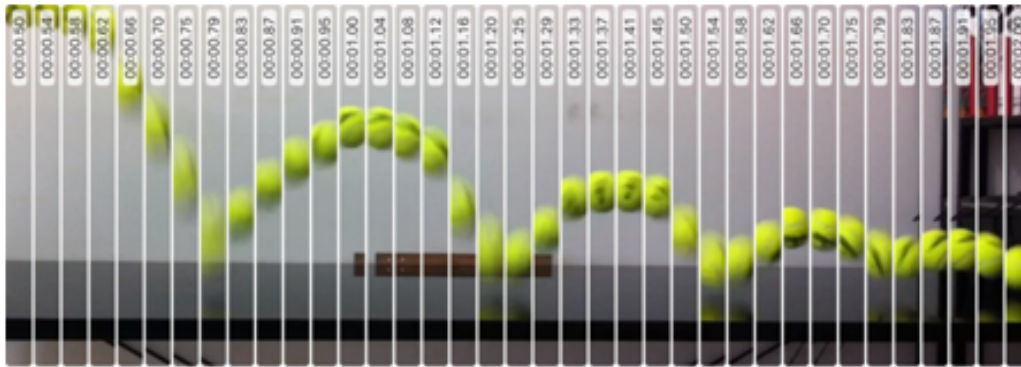


Figure 1: A queda de uma bola de tênis mostrada através de uma série de imagens verticais. Fonte: Imagem gerada pelo aplicativo NewtonDV durante a realização do experimento.

numerador e o denominador por $m/2$

$$e^2 = \frac{v_{afastamento}^2 \cdot \frac{m}{2} K_2}{v_{aproximacao}^2 \cdot \frac{m}{2} K_1}, \quad (5)$$

onde K_1 e K_2 são as energias cinéticas entre dois pontos de impacto subsequentes. Das equações (4) e (5), pode-se encontrar uma expressão que relaciona o coeficiente de restituição, as alturas máximas antes e após o impacto com a mesa e suas respectivas energias cinéticas. Desta maneira, temos que

$$e^2 = \frac{h_2}{h_1} = \frac{K_2}{K_1}; \quad (6)$$

Pela equação 6, percebe-se que as diferentes alturas máximas que a bola alcança após a colisão com a mesa é proporcional a sua energia cinética e, por sua vez, proporcional ao quadrado do coeficiente de restituição.

3 2. Desenvolvimento do experimento

O experimento consistiu em filmar a trajetória de uma bola de tênis saltitante que foi abandonada de uma altura de aproximadamente $0,53 \text{ m}$ sobre uma superfície plana horizontal. A escolha deste experimento relativamente simples, deve-se ao fato de sua análise, na maioria das vezes, ser reduzida ao estudo de queda livre. A Figura 1 a seguir mostra uma imagem em série na vertical do experimento, obtidas com o aplicativo *NewtonDV*¹

O vídeo, com uma duração de aproximadamente 3 s , foi analisado utilizando os aplicativos *Video Physics*² e *Graphical Analysis*³. Caso o leitor opte pelo sistema operacional Android, poderá utilizar o aplicativo *VidAnalysis*⁴ descrito em [6].

¹<https://itunes.apple.com/pt/app/newtondv/id717653395?mt=8>.

²<https://itunes.apple.com/pt/app/vernier-video-physics/id389784247?mt=8>

³<https://itunes.apple.com/pt/app/vernier-graphical-analysis/id522996341?mt=8>

⁴https://play.google.com/store/apps/details?id=com.vidanalysis.free&hl=pt_BR

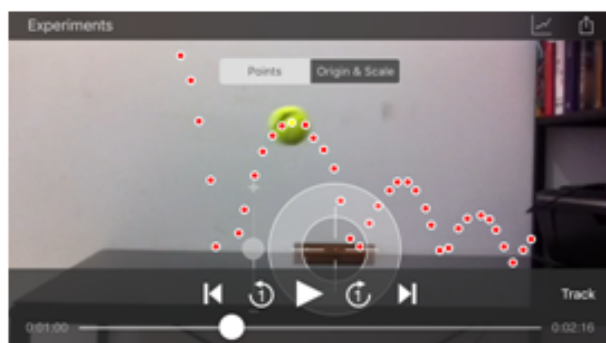


Figure 2: Pontos marcados com o aplicativo Video Physics, que mostra a trajetória seguida pela da bola de tênis durante o experimento.

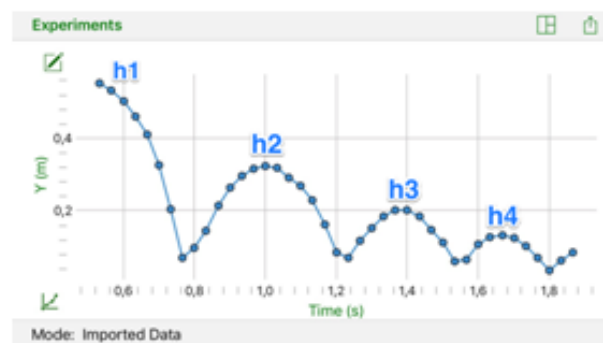


Figure 3: O gráfico gerado pelo aplicativo Graphical Analysis mostra as alturas máximas atingidas pela bola de tênis em relação a mesa.

Para captar o movimento da bola foi utilizado um *iPhone 4*, que possui uma câmera que filma a uma taxa de aquisição de 30 quadros por segundos. As câmeras de um smartphone possuem um sensor chamado de CMOS (*Complementary Metal Oxide Semiconductor*) e sua principal tarefa, de acordo com Kunh, Müller, Hirth, Hochberg, Klein e Molz [3] é

[...] a conversão pixel a pixel da luz em impulsos elétricos mensuráveis, onde um (“elemento de imagem”) representa um único pixel. Isto é feito com sensores CMOS por uma pluralidade de circuitos amplificadores, tendo cada pixel individual o seu próprio circuito eletrônico ou leitura eletrônica.

4 Videoanálise do experimento

O vídeo utilizado para a videoanálise tem uma duração de 3 s. Durante este tempo a bola se chocou com a mesa por quatro vezes sobre a mesa como mostra a Figura 2. Durante as colisões parte da energia cinética da bola de tênis foi perdida, com isso a bola atingiu diferentes alturas máximas, como se pode observar na Figura 3.

Os valores correspondentes às alturas máximas apresentadas na Figura 3 estão discriminados na Tabela 1 e foram obtidas por videoanálise utilizando o aplicativo *Graphical Analysis*.

Com os valores das alturas máximas é possível encontrar o coeficiente de restituição que, consequentemente, servirá para calcular as perdas de energia após cada colisão. Como pode ser visto na Tabela 1, o coeficiente de restituição permanece quase que completamente constante para os quatro primeiros impactos, mesmo sendo as alturas muito diferentes ($h_1 = 0,53\text{ m}$, $h_4 = 0,12\text{ m}$).

Utilizando a equação (5), é possível estimar a porcentagem da energia que é perdida após cada colisão. Os valores são mostrados na Tabela 1 e na Figura 4.

Pode-se perceber que a cada dois impactos subsequentes há uma perda de aproximadamente 38% da energia cinética.

O aplicativo também gera os gráficos das velocidades versus tempo na horizontal e na vertical. A

Table 1: *Dados obtidos por videoanálise utilizando o aplicativo Video Physics para as quatro primeiras alturas máximas da bola de tênis e os valores para a perda de energia após as colisões*

| Altura máxima (m) | e | e^2 | Perda de energia ($K_f = e^2 K_i$) |
|-------------------|-------------------------|-------|--------------------------------------|
| $h_1 = 0,5311$ | | | |
| $h_2 = 0,3227$ | $\sqrt{h_2/h_1} = 0,77$ | 0,60 | 40% |
| $h_3 = 0,2007$ | $\sqrt{h_3/h_2} = 0,78$ | 0,62 | 38% |
| $h_4 = 0,1258$ | $\sqrt{h_4/h_3} = 0,78$ | 0,62 | 38% |

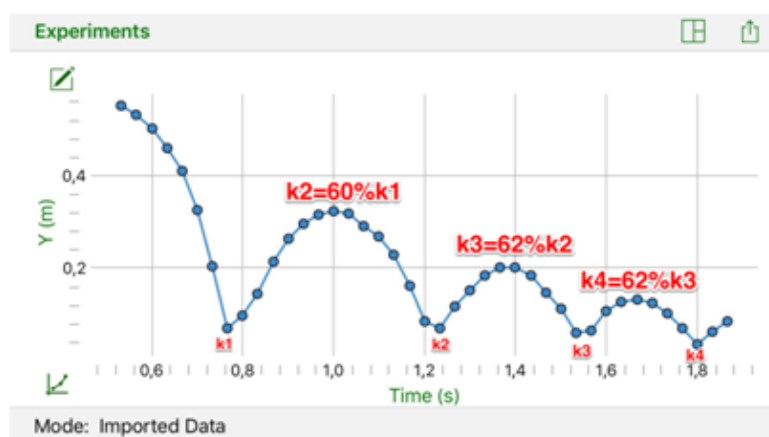


Figure 4: *Gráfico gerado pelo aplicativo Graphical Analysis e modificado pelo autor, que mostra a perda de energia após cada impacto subsequente.*

Figura 5 apresenta estes gráficos.

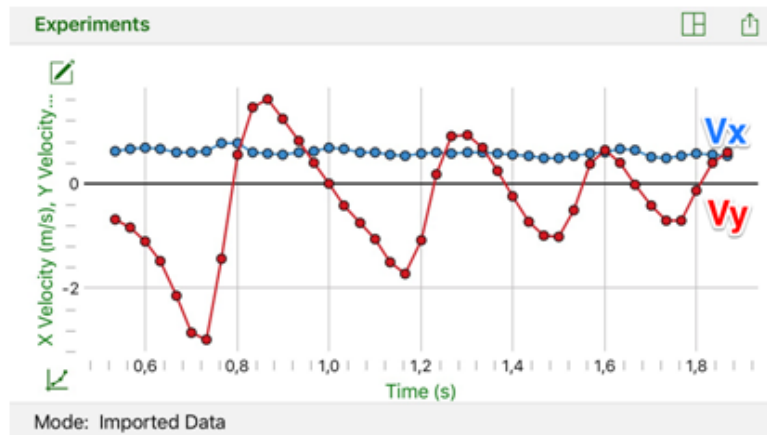


Figure 5: O gráfico gerado pelo aplicativo Graphical Analysis mostra as velocidades horizontais e verticais.

Como se pode observar no gráfico, ocorre uma mudança de sentido da velocidade da bola de tênis na vertical (v_y), que inicialmente estava próxima de zero e que depois aumentou na direção negativa devido à ação descendente da aceleração da gravidade.

Uma vez que ela toca o solo, inverte-se a direção de sua velocidade que tem sua intensidade reduzida por um fator de aproximadamente 0,78 (coeficiente de restituição). Enquanto que a velocidade horizontal (v_x), permanece praticamente constante com o tempo. De acordo com a Princeton University [7]: “a bola será acelerada pela gravidade na direção y , mas não na direção x , e seu movimento deverá obedecer às equações, $X = X_0 + v_{0x}t$ e $Y = Y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$.”

5 Refletindo sobre o uso da videoanálise em sala de aula

Quando um experimento de queda dos corpos é realizado em sala de aula, normalmente se solta uma bola a partir do repouso e exploram-se assuntos como queda livre, conservação da energia mecânica, através dos dados qualitativos, reduzindo-se assim o estudo dos dados quantitativos a exercícios propostos pelo livro didático.

Em escolas onde há laboratórios de Ciências/Física equipados, monitora-se sua queda por equipamentos que possuem diversos fotosensores colocados ao longo do percurso e, quase sempre, mede-se a aceleração de queda do corpo estimando o valor da aceleração da gravidade.

Com o avanço das tecnologias de telefonia ficou mais simples explorar este tipo de atividade em sala de aula. Kunh, Müller, Hirth, Hochberg, Klein e Molz [3] afirmam que,

A captura com sensores internos de dados físicos particularmente no ensino de Física tornam possíveis vários experimentos qualitativos e quantitativos. Smartphones e tablets são, portanto, laboratórios portáteis pequenos que podem substituir aparelhos de testes confusos.

Além de tornarem possível que os alunos filmem outros exemplos de quedas de corpos e investiguem sobre:

- (a) Os resultados das videoanálises com os resultados teóricos;
- (b) As velocidades horizontais e verticais;
- (c) As alturas máximas e a perda de energia cinética após cada impacto com a mesa;
- (d) Relacionar o coeficiente de restituição da colisão com as alturas máximas, as velocidades e as energias cinéticas antes e depois da colisão.
- (e) É importante ressaltar que estas atividades devem ser realizadas como forma de aprofundar os assuntos já estudados em sala de aula e que o professor apresente o funcionamento do aplicativo para seus alunos.

6 Considerações finais

Neste artigo, o uso do smartphone é proposto para fazer uma videoanálise do movimento de uma bola de tênis que realiza múltiplas colisões com uma mesa. Com as análises dos resultados, pôde-se observar que as diferentes alturas máximas que a bola alcança, após a colisão com a mesa, é proporcional a sua energia cinética; o coeficiente de restituição permanece quase que completamente constante, mesmo para alturas muito diferentes; a velocidade vertical varia devido à ação da gravidade, enquanto que a velocidade horizontal permanece praticamente constante com o tempo; entre outras observações.

Diante destas análises quantitativas, verificou-se que inserir recursos tecnológicos nas aulas é um caminho simples e possível a todo professor. Desta maneira, espera-se que este trabalho norteie a ação pedagógica do professor, sem que haja uma redução das experiências realizadas em laboratórios, já que o objetivo é reduzir o fosso entre a Ciência e a experiência cotidiana em locais onde estes laboratórios não sejam funcionais, através das tecnologias presentes no cotidiano dos estudantes.

Como última consideração, indicamos ao leitor outros aplicativos como o *Lablet*⁵, disponível para usuários do sistema operacional Android e o software de utilização online *Web Tracker*⁶.

References

- [1] Sears, Zemansky, Física, Vol. 01, 12^a Edição. Pearson, 2009.
- [2] Rath, G; Smartphones in Physikunterricht, PLUS LUCIS, 1-2, 2015, p. 8-13. Disponível em:<<http://pluslucis.univie.ac.at/PlusLucis/151/s08.pdf>>. Último acesso: 11 de fevereiro de 2018.

⁵<https://play.google.com/store/apps/details?id=nz.ac.auckland.lablethl=en>

⁶<https://www.splab.io/wt/>

- [3] Kunh, J; Muller, A.; Hirth, M.; Hochberg, K.; Klein, P.; Molz, A. Naturwissenschaften im Unterricht Physik: Materialien & Methoden. Experimentieren mit Smartphone und Tablet-PC. p. 4-9, v. 145, Feb, 2015.
- [4] Hirth, M.; Kunh, J; Müller, A.; Rohs, M.; Klein, P, iMobile-Physics:Seamless Learning durch Experimente mit Smartphones & Tablets in Physik, ZFHE Jd.11, n. 4, August 2016, p. 17-37. Disponível em: < https://www.researchgate.net/publication/308723033_iMobilePhysics_Seamless_Learning_durch_Experimente_mit_Smartphones_Tablets_in_Physik >. Último acesso: 11 de fevereiro de 2018.
- [5] Klein, P; Kunh, J; Muller, A.; Gröber, S., Video Analysis Exercises in regular Introductory Physics Courses: Effects of Conventional Methods and Possibilities of Mobile Devices, p. 270-288, Multidisciplinary Research on Teaching and Learning, 2015. Disponível em:< https://link.springer.com/chapter/10.1057/9781137467744_15 >. Último acesso: 11 de fevereiro de 2018.
- [6] Araújo, F.A.G; Oliveira, M.M.; Nobre, E.F.; Pinheiro, A.G.; Cunha, M.S. Estudo do Movimento com o Aplicativo VidAnalysis: Possibilidades no Estudo de Lançamento de projéteis. Revista do Professor de Física. v1, n.2, 2017. Disponível em: <<http://periodicos.unb.br/index.php/rpf/article/view/25088/19826>>. Último acesso em: 11 de Fevereiro de 2018.
- [7] Princeton University, Physics 101 Lab Manual, Setembro, 2009. Disponível em: < http://www.physics.princeton.edu/mcdonald/examples/ph101_2013/Labs/PHY101_2013_Lab_Manual.pdf>. Último acesso: 11 de fevereiro de 2018.