



---

## A ATUALIDADE DA AFINAÇÃO PITAGÓRICA

**RICARDO DOURADO FREIRE**

Dep. de Música - UnB

DOI : 10.26512/dramaturgias29.59430



## Resumo

A identificação de uma razão matemática para a definição de frequências e notas musicais pode ser considerada o principal legado do pitagorismo para a área da música. Essa base matemática constitui o elemento central da discussão que permeia o desenvolvimento de sistemas de afinação desde a antiguidade até os dias atuais. O debate atraiu a participação de astrônomos, filósofos, matemáticos e músicos como Aristóxeno, Ptolomeu, Euclides, Boécio, Galilei, Descartes, Newton e Alexander Ellis, todos em busca de soluções para a definição de um sistema de afinação funcional para a execução em instrumentos de teclado, corda, sopro e para a voz humana. Nesse contexto, emerge a relevância de discutir a atualidade do sistema de afinação proposto por Pitágoras para o conhecimento contemporâneo.

**Palavras-chave:** Pitagorismo, Afinação expressiva, Temperamentos musicais, Razões matemáticas na música.

## Abstract

The identification of a mathematical reason for the definition of frequencies and musical notes can be considered the main legacy of Pythagoreanism for the area of music. This mathematical base constituted the central element of the discussion that permeated the development of tuning systems from ancient times to today. The debate attracted the participation of astronomers, philosophers, mathematicians and musicians such as Aristoxenus, Ptolemy, Euclid, Boëtius, Galilei, Descartes, Newton and Alexander Ellis, all in search of solutions for the definition of a functional tuning system for performance on keyboard, strings, woodwinds and human voice instruments. In this context, the relevance of discussing the current tuning system proposed by Pythagoras for contemporary achievement emerges.

**Keywords:** Pythagoreanism, Expressive Tuning, Musical Temperaments, Mathematical Reasons in Music.



O uso de razões matemáticas para a definição de intervalos musicais está atribuído ao legado de Pitágoras no século VI AC. O uso da razão matemática  $3/2$  para definir um intervalo de quinta ascendente torna-se o fundamento racional para identificação de notas musicais. A sequência de seis intervalos de 5as ascendentes e seis intervalos de 5as descendentes, permite a divisão da oitava musical em doze partes, estrutura que se manteve como referência desde a sua postulação. No contexto da música europeia ocidental, a proposta de Pitágoras permite a organização do primeiro sistema de afinação, conhecido como Afinação Pitagórica que acaba definindo uma sequência fixa de proporções entre as notas da escala. Ao longo da história, foram realizadas diversas propostas de afinações temperadas, ou seja, afinações que modificam o ajuste de intervalos a partir de razões matemáticas, substituindo as afinações do modelo pitagórico por afinações com alterações intencionais.

Cornelli (2011) discute o uso tradicional do nome de Pitágoras para identificar uma categoria historiográfica denominada pitagorismo. No ambiente musical, o pitagorismo está associado ao uso de princípios matemáticos para definição do conhecimento e até mesmo da afirmação de que “os números são as coisas”, que serviram de parâmetro para definição de notas, intervalos e escalas musicais.

*A questão central para a compreensão do pitagorismo: aquela de considerá-lo como categoria historiográfica, superando metodologicamente a pretensão de alcançar uma única compreensão. A imagem que resulta da análise da categoria do pitagorismo ao longo da história da tradição é a de uma grande tradição filosófica homogênea que pretende compreender o ser humano, o céu, a história, a política, mediante conceitos como harmonia, número, justiça etc.*

CORNELLI, 2011, P. 230

A concentração de vários trabalhos atribuídos a Pitágoras dentro de uma categoria historiográfica permite encontrar na “comunidade pitagórica uma amálgama de narrativas e figuras centradas em Pitágoras. (Onde) da mesma maneira como em uma obra aberta, novas estórias e acontecimentos são atribuídos a ele. (Mota, 2013, p.113).”

A corrente Pitagórica definiu elementos básicos da estrutura da música ocidental. A partir dos conceitos do pitagorismo foram definidas referências para a definição de notas musicais e proporções para definição de intervalos musicais. Consequentemente, um conjunto de intervalos define uma sequência definida de notas, ou seja, uma escala musical. Neste sentido as indicações atribuídas pitagóricas serviram para definir o conjunto sonoro de doze notas musicais, organizados em uma estrutura circular, que serve de fundamento para a explicações de estruturas musicais conhecidas como teoria da música. (Fig. 1)

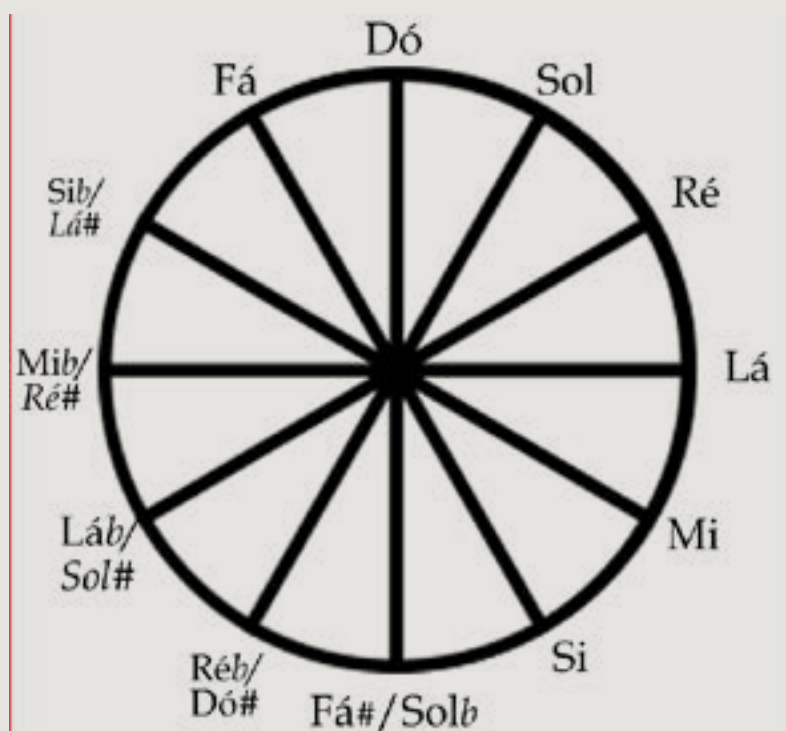


Fig. 1- Ciclo das Quintas (leitura no sentido horário)

Temperamentos históricos do renascimento, barroco, classicismo e romantismo, buscaram valorizar as estéticas sonoras de cada período. A necessidade de padronização da afinação, durante o século XX, permitiu que o temperamento igual, no qual a oitava musical é dividida em doze partes iguais, se tornasse o sistema de afinação de referência. A utilização de afinadores eletrônicos e aplicativos para telefone celular, tornou esse sistema fixo um padrão imposto universalmente na afinação de instrumentos eletrônicos e acústicos. Michael Halewood apresenta uma crítica ao domínio imposto pela adoção do sistema igual e menciona que "hoje, esse modelo se tornou tão dominante que torna-se difícil vislumbrá-lo nas suas especificidades como apenas uma das soluções possíveis (Halewood, 2015)."

No contexto da atualidade, na qual a imposição de modelos digitais vinculados a computadores e smartphones dominam diversas práticas musicais, podemos indagar se fundamentos da matemática clássica ainda são relevantes para o sistema de audição humana na apreciação de contextos musicais. Nessa perspectiva, torna-se importante refletir sobre as possibilidades de uso de um sistema de afinação da antiguidade clássica no mundo atual.

Murray Barbour, em *Tuning and Temperament*, publicado originalmente em 1951, explica que o sistema pitagórico está baseado exclusivamente em dois intervalos: a oitava justa e a quinta justa. Os intervalos podem ser representados por razões matemáticas para definição do comprimento de uma corda ou do tamanho de um tubo sonoro. A oitava é representada pela razão 2:1 e enquanto a quinta justa é definida pela razão 3:2, sendo possível "afinar todas as notas da escala diatônica em uma sucessão de quintas e oitavas, e seguindo o procedimento, todas as notas da escala cromática. Desta maneira, um princípio simples, mas rígido, suporta a afinação pitagórica (Barbour, 2004)."

Boécio, no século VI, escreveu *De institutione musica* baseado em princípios gregos onde descreve a escala Pitagórica (Fig. 2) a partir de proporções e razões matemáticas definidas. O intervalo de oitava está representado pela razão 2:1, enquanto a quinta justa é definida pela razão 3:2 e a quarta justa pela proporção 4:3. O intervalo de segunda maior é derivado da sequência de duas quintas consecutivas, o que gera a razão 9:8. A terça maior, com razão 81:64, é gerada a partir da sequência de duas segundas maiores. O semitom diatônico, entre as notas Mi e Fá ou Si e Dó, está determinado pela razão 256:243, resultado da diferença entre a quarta justa e a terça maior (Wardhaugh, 2008)."

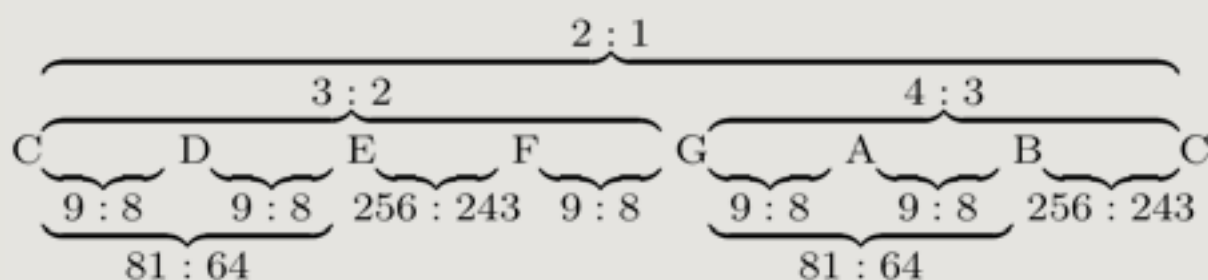


Fig. 2 – Razões dos intervalos da escala pitagórica de acordo com as definições de Boécio

As investigações das notas musicais realizadas pelos pitagóricos identificaram um dos principais problemas matemáticos da história da música. O ciclo das quintas é formado a partir da sequência de doze quintas justas consecutivas. No entanto, o valor da frequência final é diferente do cálculo realizado a partir de uma sequência de sete oitavas consecutivas. A representação matemática demonstra que 7 Oitavas < 12 quintas justas, onde:

Sequência de sete oitavas  
 $2^7 = 524288/4096 = 128$

<

Sequência de doze quintas Justas  
 $(3/2)^{12} = 531441/4096 = 129.746$

A representação matemática pode ser demonstrada musicalmente pela visualização dos valores das frequências das notas em uma pauta musical com início no Dó de frequência 37,5 Hz, valor de referência para afinação com Lá=440hz. (Fig. 3)



Fig. 4 – Notas e frequências de acordo com as sequências de oitavas e quintas justas.

A diferença no cálculo das frequências de notas que deveriam ser enharmônicas, como Dó e Si sustenido ( $C = B\#$ ), apresenta um problema complexo que tem sido explorado em diversas abordagens até os dias atuais.. O pequeno espaço entre os valores, será denominado como pitagórico, ou seja o espaço encontrado pelo pitagorismo para identificar a diferença entre notas enharmônicas, ou seja com nomes equivalentes como Lá $b$  e Sol $\#$  ou Ré $\#$  e Mib. A formula matemática está presente na diferença entre a razão 74:73, que corresponde a aproximadamente 1/9 de tom (24 cents).

## Afinação e temperamentos

No contexto da música europeia ocidental, a proposta de Pitágoras permite a organização do primeiro sistema de afinação, conhecido como Afinação Pitagórica que apresenta uma sequência irregular de proporções entre as notas da escala. Ao longo da história, foram realizadas diversas propostas de afinações temperadas, ou seja, afinações que modificavam as relações originais propostas por Pitágoras.

O sistema de afinação igual, denominado *equal temperament* em inglês, refere-se ao procedimento de divisão da oitava musical em doze partes rigorosamente iguais. As primeiras propostas para esse sistema surgiram no século XVI com Giovanni Maria Lanfranco (Barbour, 2004). A escolha da raiz duodécima de dois ( $\sqrt[12]{2}$ ) permitiu a definição da distância padrão entre cada um dos semitons de uma escala de doze notas. Para a identificação de intervalos, pode-se modificar o expoente da potência de dois, indicando o número de semitons:  $2^{n/12}$ , onde  $n$  representa o número de semitons do intervalo.

A estrutura de intervalos para instrumentos de afinação fixa, principalmente a partir da utilização órgãos de tubos em igrejas, exigiu um sistema definido e estável para afinação de todas as notas do instrumento. Além disso, o processo de construção de violões e instrumentos de cordas com trastes precisam seguir rigorosos procedimentos de colocação da divisão entre as notas para permitir uma afinação proporcional.

Barbour (1951) argumenta que existem fundamentalmente dois sistemas naturais de afinação: a afinação Pitagórica e a afinação justa. A afinação Pitagórica está baseada na razão 3/2 para definição dos intervalos de quinta, e conseqüentemente para a definição da divisão da oitava em doze notas. A afinação justa, por sua vez, fundamenta-se nas relações intervalares da série harmônica, utilizando as proporções 2:1, 3:2, 4:3, 5:4 e 6:5 para a definição dos intervalos dentro da oitava musical. Propostas de afinação que introduzem alterações nos intervalos puros, ou seja, intervalos sem batimentos, são classificadas como temperamentos, representando a modificação intencional da afinação exata de um intervalo musical para estabelecer um equilíbrio nas relações entre as doze notas da oitava.

O pesquisador Owen Jorgensen (1991) identificou 216 formas históricas de estruturação da afinação, entre 1626 e 1917, a partir de diferentes critérios históricos para definição das doze notas de uma oitava musical. De acordo com Jorgensen (1991), o sistema pitagórico foi utilizado a partir de 1373 na Inglaterra a afinação de órgãos nas igrejas, com o registro da proposta de um astrônomo francês, Monsieur Boulliau. As explicações práticas para a afinação de cada uma das notas de um órgão indicam o uso de quintas puras, afinadas sem batimentos, em onze intervalos, sendo necessário ajustar, ou seja, temperar, o batimento da nota Si, elevando-a em 3,5 batimentos por segundo. A proposta resolve a maioria dos problemas de afinação de quintas e quartas, no entanto a afinação dos novos intervalos explorados, como 3as e 6as apresentam severos batimentos nas composições a duas ou três vezes.

Isaac Newton realizou uma descrição, por meio de diagramas, dos estudos matemáticos de Descartes, revelando uma organização irregular das frequências das notas (Wardhaugh, 2008). Os diagramas apresentam dois conjuntos de números que permitem identificar a análise da divisão da oitava em 53 partes iguais, cujos resultados das notas são similares aos das razões pitagóricas. (Fig. 5) A pesquisa de divisões iguais da oitava para identificação das frequências das notas foi realizada anteriormente por Marin Mersenne, Nicolaus Mercator e Christiaan Huygens. O objetivo principal seria "encontrar conjuntos de 'meta-escalas', com os menores denominadores comuns, que pudessem expressar vários subconjuntos de escalas com precisão. Isaac Newton conseguiu utilizar padrões com divisão em 612 e 53 partes iguais (Muzzolini, 2020)."

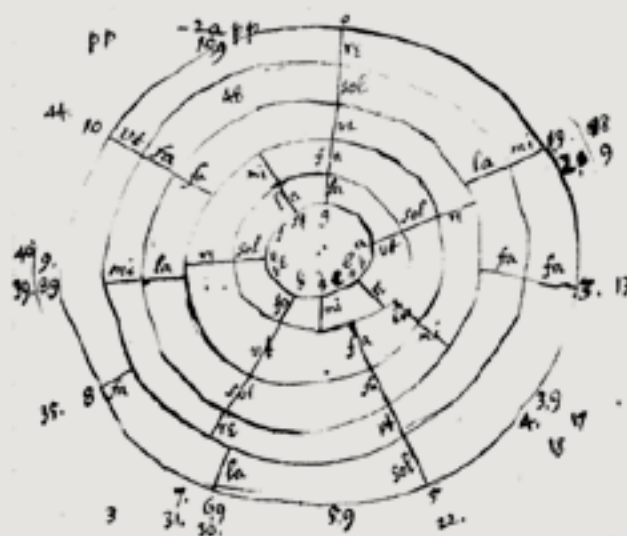


Fig. 5- Diagrama de Isaac Newton com indicações de proporções da escala de acordo com a divisão em 53 partes iguais. (Wardhaugh, 2008)

---

## Atualidade da afinação Pitagórica

O desenvolvimento de sistemas de afinação e temperamentos esteve vinculado a necessidade da redução das possibilidades sonoras a um padrão fixo de doze notas utilizadas em instrumentos de teclado como o órgão de tubos, em seguida dos cravos e finalmente na afinação de pianos. A necessidade de procedimentos objetivos que pudessem solucionar a necessidade de execução musical tendo referência qualquer nota do teclado criou o desafio para a criação de modificações ou temperamentos necessários para o equilíbrio da performance musical coletiva.

Instrumentos de afinação variável, como instrumentos de corda, ou instrumentos de afinação baseados na série harmônica, como instrumentos de metal ou madeira, possuem características acústicas que permitem o ajuste da afinação de uma nota de maneira ascendente ou descendente. O contexto dos instrumentos melódicos permite a utilização de diversos sistemas de afinação e cabe ao músico fazer os ajustes de acordo com os contextos musicais. A pedagogia dos instrumentos de corda, baseados na afinação de quintas justas, acabou mantendo diversos elementos de afinação pela razão  $3/2$  que continuam válidos nas práticas pedagógicas e musicais de instrumentistas de corda.

Whitcomb (2017) apresenta uma discussão sobre a importância dos instrumentistas de corda conhecerem e saberem afinar seus instrumentos de acordo com os sistemas de afinação pitagórico, justo e igual. Ele argumenta que é possível “ver como a afinação pitagórica pode parecer atrativa para instrumentistas de corda? Ela apresenta intervalos perfeitos que são os mesmos da afinação justa, enquanto os outros intervalos possuem inflexão que realçam as tendências de condução de vozes, principalmente dos semitons (Whitcomb, 2017).”

Galamian (2013) apresenta formatos de digitação para o violino que reforçam as relações de proximidade e distância entre tons e semitons, sendo que os semitons devem ser colocados com os dedos quase juntos e os tons com os dedos separados. Neste caso, ficam reforçadas as relações presentes na afinação pitagórica. Além disso, Galamian apresenta um excelente comentário no qual torna-se importante saber o tipo de afinação usada pelo violinista, e comenta que “nenhum violinista toca de acordo com fórmulas matemáticas, ele somente deve seguir o julgamento do seu ouvido, e nenhum sistema de afinação vai funcionar sozinho (Galamian, 1983).”

A obra de Christine Heman (1964) sobre afinação de instrumentos de corda apresenta o conceito de afinação linear, no qual as terças e sétimas precisam ser ajustadas com afinação mais alta, enquanto que e oitavas devem ficar com afinação mais baixa. Desta maneira, na execução dos Tetracordes apresentará terças pitagóricas e quintas justas como blocos de construção da escala musical, sendo que a terça maior no movimento monofônico corresponde a distância de dois tons inteiros. No Brasil, Glesse Collet também escreveu sobre a afinação em instrumentos de corda e menciona a importância dos ajustes da escala menor que requer muita atenção pois “os tons inteiros devem ser mais largos, pitagóricos, e os semitons são estreitos, pitagóricos. (Collet, 2022)

No ensino atual do violoncelo, Hans Jensen (2017) indica que a compreensão do sistema pitagórico, tanto do ponto de vista teórico como prático pode oferecer uma fundação para a performance expressiva. “A escala pitagórica, tanto no modo maior quanto no modo menor, é usada de forma comum quando a maioria dos músicos praticam escalas e se apresentam com uma qualidade melódica expressiva. (Jensen, 2017).”

A primeira publicação sobre afinação de Freire (2013) foi apresentado no encontro da Associação Brasileira de Performance Musical, ABRAPEM de 2013, intitulado Em

busca de uma Afinação Justa: relações entre harmônicos superiores e inferiores na performance com duas clarinetas. O artigo parte da explicação do conceito de sons combinatórios para propor a identificação de sons resultantes enquanto notas resultantes, ou seja a definição de frequências para identificação das notas que surgem a partir da percepção não-linear de dois sons relativamente agudos. A pesquisa inicial mostrou que para definir uma nota musical torna-se necessário determinar qual o sistema de afinação deve ser utilizado pois uma mesma nota pode ser representada por uma variedade de frequências de acordo com o cada sistema de afinação. (Freire, 2017)

Artigo de Freire (2016) aborda o problema da afinação já no título: *Como será que eu afino? A relação entre sistemas de afinação e parâmetros de afinação na performance musical*. A investigação da relação entre sistemas de afinação e parâmetros de afinação revelou a inexistência de um único parâmetro fixo estabelecido para a organização da afinação. A identificação de três sistemas principais – Pitagórico, Fixo e Igual –, com parâmetros próprios, possibilita a discussão de possibilidades de afinação em contraposição ao conceito de afinação absoluta.

A proposta de Pablo Casals, no início do século XX, para utilização da afinação como recurso intencional da performance musical foi denominada Afinação Expressiva. A proposta implica na modificação proposital da frequência de algumas notas para valorizar a condução melódica, sendo decisões que não estão escritas explicitamente pelo compositor na partitura e pertencem ao campo de conhecimento da performance musical. (Freire, 2021)

A análise das descrições de Casals revela uma lógica específica para a execução de conduções melódicas, enquanto a abordagem para notas duplas e contextos harmônicos apresentava procedimentos distintos e, por vezes, antagônicos. Nesse contexto, torna-se possível que uma mesma nota possa ser representada por diferentes frequências, estabelecendo-se uma hierarquia entre a relação melódica e harmônica, na qual o aspecto melódico é priorizado. O ponto a ser evitado é uma afinação mecanicamente igual, com intervalos desprovidos de potencial dramático ou expressivo.

A análise gráfica dos intervalos do sistema Pitagórico (Fig. 6) indicam que os intervalos apresentam um comportamento de afinação que direciona as alterações de afinação para o primeiro ou para o quinto grau, que funcionam como as notas de referência para os ajustes de afinação. Desta maneira, no sentido ascendente os intervalos ficam cada vez mais altos em direção a 5ª Justa, e também seguem uma proporção na direção entre 5ª e 8ª Justa. As variações no ajuste da afinação acentuam as distâncias de cada intervalo da nota fundamental da tonalidade, ao mesmo tempo que valorizam a aproximação das notas de referência.

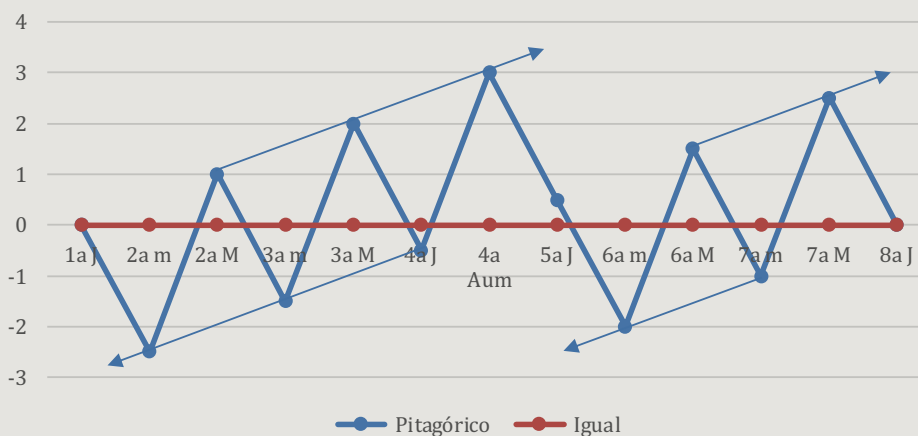


Fig. 5 - Relação entre as diferença de afinação entre as notas do sistema pitagórico e sistema igual.

---

## Conclusão

Os princípios de afinação identificados por Pitágoras, que apontam a razão  $3/2$  como elemento fundamental da percepção humana na definição de notas musicais, foram cruciais para a estruturação dos elementos basilares da teoria da música ocidental. Esse princípio fundador permanece válido tanto para a teoria quanto para a percepção de estruturas musicais, uma vez que o intervalo de quinta justa e a relação  $3/2$  perduram como elementos essenciais na maioria dos contextos musicais.

Casals (Freire, 2021) personifica os elementos filosóficos que fundamentam a afinação expressiva e os aspectos práticos que podem ser valorizados nas relações entre melodia e harmonia. Sua abordagem demonstra que a construção da expressão melódica acompanha a estrutura de percepção sequencial do ouvido, denominada por Heman como afinação linear. Contudo, a variedade de nomes para designar as alterações melódicas na afinação expressiva podem desconsiderar os conceitos centrais da afinação pitagórica ao priorizar aspectos práticos em relação ao processo histórico.

O parâmetro  $3/2$  mantém sua efetividade e aplicação prática nos dias atuais, assim como suas proposições matemáticas. Dessa forma, a relevância do sistema pitagórico não se restringe a estudos clássicos; a música é dinâmica, e os fundamentos descobertos por Pitágoras conservam sua validade. Assim sendo, o campo de pesquisa permanece aberto e atualizado para novas descobertas e possibilidades de aplicação em diversas manifestações expressivas.

---

## Bibliografia

- BARBOUR, James Murray. Tuning and temperament: a historical survey. Dover Publications, 2004.
- COLLET, Glésse. Afinação dos instrumentos de cordas. Curitiba: Ed. Apris, 2022.
- CORNELLI, Gabriele. O pitagorismo como categoria historiográfica. Centro de Estudos Clássicos e Humanísticos, 2011.
- FREIRE, R. J. D. Afinação expressiva: identificação de parâmetros para construção da performance musical. In: Performance musical sob uma perspectiva pluralista. 1. ed. São Paulo: MUSA EDITORA, 2021. v. 1, p. 151-170.
- FREIRE, R. J. D. Como será que eu afino? A relação entre sistemas de afinação e parâmetros de afinação na performance musical. Música Hodie, Goiânia, v. 16, n. 1, p. 133-144, 2016.
- FREIRE, R. J. D. Em busca de uma afinação justa: relações entre harmônicos superiores e inferiores na performance com duas clarinetas. In: PERFORMA - International Conference on Performance Studies, 2013, Porto Alegre- RS.
- FREIRE, R. J. D. Relações de afinação na produção de notas resultantes de acordo com os sistemas de Afinação Igual, Pitagórico e Justo. PERCEPTA - Revista de Cognição Musical, [Local de publicação], v. 4, p. 79-94, 2017.
- GALAMIAN, Ivan. Principles of violin playing and teaching. Courier Corporation, 2013.

- HALEWOOD, Michael. On equal temperament: tuning, modernity and compromise. *History of the Human Sciences*, Thousand Oaks, v. 28, n. 3, p. 3-21, 2015.
- HEMAN, Christine. *Intonation auf Streichinstrumenten: melodisches und harmonisches Hören*. Basel: Bärenreiter-Verlag, 1964 (1981).
- HUBBARD, Timothy L. The Pythagorean comma and preference for a stretched octave. *Psychology of Music*, v. 50, n. 2, p. 670-683, 2022.
- JENSEN, Hans Jørgen; CHUNG, Minna Rose. *CelloMind: intonation and technique*. Ovation Press, Ltd., 2017.
- JORGENSEN, Owen H. *Tuning*. Michigan State Press, 1991.
- MOTA, Marcus et al. Pythagoras Homericus: performance as Hermeneutic horizon to interpret Pythagorean tradition. In: *On Pythagoreanism*. Berlin and Boston: 2013. p. 103-115.
- MUZZULINI, Daniel. Isaac Newton's Microtonal Approach to Just Intonation. *Empirical Musicology Review*, [Local de publicação], v. 15, n. 3-4, p. 223-248, 2020.
- WARDHAUGH, Benjamin. *Music, experiment and mathematics in England, 1653–1705*. Oxon; New York: Routledge, 2008.
- WHITCOMB, Benjamin. Intonation on a string instrument: three systems of tuning and temperament. *American String Teacher*, [Local de publicação], v. 67, n. 2, p. 20-23, 2017.